Universidad Nacional Mayor de San Marcos

Universidad del Perú. Decana de América

Facultad de Ciencias Matemáticas

Escuela Profesional de Matemática

El lema de Yoneda y algunas de sus aplicaciones

TESIS

Para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática

AUTOR

Carlos MEJÍA ALEMÁN

ASESOR

Alex MOLINA SOTOMAYOR

Lima, Perú

2019

Referencia bibliográfica

Mejía, C. (2019). *El lema de Yoneda y algunas de sus aplicaciones*. Tesis para optar el título profesional de Licenciado en Matemática. Escuela Profesional de Matemática, Facultad de Ciencias Matemáticas, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima, Perú.

"Año de la lucha contra la corrupción y la impunidad"

Hoja de metadatos complementarios

Código ORCID del autor (dato opcional): 0000-0002-5081-9175

Código ORCID del asesor o asesores (dato obligatorio): 0000-0002-0817-3606

DNI del autor: 42549914

Grupo de investigación : Ninguno

Institución que financia parcial o totalmente la investigación:

Autofinanciar

Ubicación geográfica donde se desarrolló la investigación. Debe incluir localidades y/ o coordenadas geográficas:

Mz.U lote 18 Los Chasquis – Retablo - Comas

Año o rango de años que la investigación abarcó:

Un año.

Inicio: Julio 2018

Fin: Julio 2019

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
(Universidad del Perú, DECANA DE AMÉRICA)
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS
Ciudad Universitaria – Av. Venezuela S/N cuadra 34
Teléfono: 619-7000, Anexo 1610
Correo Postal: 05-0021, E-mail: eapmat@unmsm.edu.pe
Lima – Perú

Escuela Profesional de Matemática

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA

En la UNMSM - Ciudad Universitaria - Facultad de Ciencias Matemáticas, siendo las ......16:20 horas del Jueves 26 de setiembre de 2019, se reunieron los docentes designados como Miembros del Jurado Evaluador de Tesis: Dr. Edgar Diógenes Vera Saravia (Presidente), Mg. Mario Enrique Santiago Saldaña (Miembro), Mg. Alex Molina Sotomayor (Miembro Asesor), para la sustentación de la tesis titulada: «El Lema de Yoneda y algunas de sus aplicaciones», presentado por el señor Bachiller Carlos Mejía Alemán, para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Luego de la exposición del tesista, el Presidente del Jurado invitó a dar respuestas a las preguntas que le formulen.

Hecha la evaluación correspondiente por los Miembros del Jurado, el tesista mereció la aprobación unánime obteniendo como calificativo promedio la nota de:

..........dieciocho..........(18).

A continuación, el Presidente del Jurado, Dr. Edgar Diógenes Vera Saravia, manifestó que el señor Bachiller Carlos Mejía Alemán, en vista de haber aprobado la sustentación de su tesis, será propuesto para que se le otorgue el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Siendo las 17:20 horas se levantó la sesión firmando para constancia la presente Acta en tres (3) copias originales.

Dr. Edgar Diógenes Vera Saravia
Presidente

Mg. Mario Enrique Santiago Saldaña
Miembro

Mg. Alex Molina Sotomayor
Miembro Asesor

Agradecimientos

Está tesis es dedicada a Irene y Tomasín, gracias familia.

Gracias a mis padres por darme ánimos a seguir con el estudio.

Agradezco a los profesores Alex y Mario por su tiempo a lo largo del desarrollo de esta tesis, por su paciencia al escucharme cada sábado en la tarde, por sus observaciones y sugerencias en las exposiciones y en la tesis.

Y por último agradezco al profesor Edgar por aceptar

ser jurado en está tesis y por tomarse el tiempo de escuchar las exposiciones así como también mencionar observaciones y sugerencias.

RESUMEN

EL LEMA DE YONEDA Y ALGUNAS DE SUS APLICACIONES

<u>CARLOS MEJÍA ALEMÁN</u>

Setiembre - 2019

Orientador: Alex Molina Sotomayor

Título obtenido: Licenciado en Matemática.

En este trabajo trataremos lo que son las categorías y funtores para luego demostrar el teorema de Yoneda con su corolario más importante, que es la inmersión de Yoneda, luego definiremos el funtor de puntos de esquemas y gracias a la inmersión de Yoneda daremos una definición alternativa de esquema, tal vez la más natural sobre la óptica geométrica .

<u>PALABRAS CLAVES</u>: CATEGORÍAS

FUNTORES

ESQUEMAS

FUNTOR DE PUNTOS

ABSTRACT

THE LEMMA OF YONEDA AND SOME OF ITS APPLICATIONS

CARLOS MEJÍA ALEMÁN

September - 2019

Assesor: Alex Molina Sotomayor

Degree: Mathematics.

In this paper we will deal with what are the categories and functors to then prove Yoneda's theorem with its most important corollary, which is the Yoneda immersion, then we will define the points functor of schemes and thanks to the immersion of Yoneda we will give an alternative definition of scheme, perhaps the most natural one on the geometric optics.

KEY WORDS: CATEGORIES

FUNCTORS

SCHEMES

POINTS FUNCTOR

Introducción

En este trabajo desarrollaremos la teoría de las categorías, los funtores y las transformaciones naturales usadas por primera vez por S. Eilemberg y S. Mac Lane.

El teorema principal de este trabajo es el famoso lema de Yoneda, de este lema veremos tres corolarios muy importantes, el primero es el embedding de Yoneda, el segundo corolario es una caracterización para dos objetos isomorfos y el tercer corolario es el teorema de Cayley para grupos. Por último veremos una aplicación del lema de Yoneda a la geometría algebraica.

En el **capítulo 1** veremos la idea intuitiva de clase que será de suma importancia cuando definamos lo que es una categoría; daremos diversos ejemplos de categorías especialmente en el álgebra y el análisis. Estudiaremos las categorías localmente pequeñas y las categorías pequeñas que tienen cierta particularidad (la clase de sus objetos es un conjunto) luego veremos las subcategorías y las subcategorías plenas.

Estudiaremos las flechas que son monomorfismos y epimorfismos así como también las flechas inversas a izquierda y a derecha, luego veremos los isomorfismos entre dos objetos y daremos una caracterización de tales objetos, por último veremos tres objetos particulares llamados iniciales, finales y ceros.

En el **capítulo 2** definiremos los funtores covariantes, llamados simplemente funtores, y luego los funtores contravariantes. Se tratará cuatro tipos de funtores llamados fieles, plenos, plenamente fieles y densos. Definiremos los isomorfismos entre dos categorías y daremos una caracterización de dichos isomorfismos, utilizando los tipos de funtores.

En el **capítulo 3** estudiaremos las transformaciones naturales que serán de suma importancia para el capítulo cinco. Veremos la definición de isomorfismo natural entre dos funtores y la definición de dos funtores equivalentes. Finalizando este capítulo veremos una caracterización de dos funtores equivalentes.

En el **capítulo 4** cuatro hablaremos de los funtores representables y daremos algunos ejemplos de tales funtores, luego veremos los objetos universales de funtores que serán los objetos de una categoría, llamada la categoría de los elementos.

En el **capítulo 5** estudiaremos una categoría llamada la categoría de Yoneda que será de vital importancia para el Yoneda Embedding. Definiremos el funtor de Yoneda, luego enunciaremos y probaremos el lema de Yoneda para después demostrar que el funtor de Yoneda es una inmersión de Yoneda, también veremos un corolario que nos dice que dos funtores representables son isomorfos naturalmente sí y solo si los objetos representables son isomorfos.

Finalmente en el **capítulo 6** veremos tres aplicaciones del lema de Yoneda.

La primera aplicación es caracterizar funtores representables, la segunda aplicación es el teorema de Cayley para grupos y por último veremos una aplicación a la geometría algebraica, para dicha aplicación necesitaremos las definiciones de prehaces, haces, espacios anillados, espacios localmente anillados, esquemas y algunas otras que serán escritas en tal capítulo.

Contents

Chapter 1

Categorías

1.1 Conjuntos y clases

En matemática trabajamos exclusivamente con conjuntos y cualquier colección de objetos de las que se quieren estudiar resulta ser un conjunto (el conjunto de todos los números naturales, el conjunto de todas las funciones continuas de $\mathbb{R}$ en sí mismo, etc.) Sin embargo, puede probarse, por ejemplo, que no existe el conjunto de todos los grupos. No existe ningún conjunto que tenga por elementos a todos los grupos.
La razón de fondo es que si suponemos que existe el conjunto de todos los grupos, podemos terminar demostrando que existe el conjunto de todos los conjuntos, y eso lleva a una contradicción.
Para estudiar las categorías, necesitaremos considerar colecciones de

conjuntos. Sin embargo, como lo ilustra la siguiente paradoja de Bertrand Russell, aparecen complicaciones cuando consideramos colecciones arbitrarias de conjuntos. En efecto, supongamos que la colección U de todos los conjuntos es un conjunto, luego el siguiente subconjunto $A = \{X \in U \mid X \notin X\}$ de U, cumple que $A \in A$ sí y solo si $A \notin A$, lo cual es absurdo.

Para evitar tales paradojas, consideraremos algo nuevo en las colecciones de conjuntos, que será la noción intuitiva de **clase**, que viene ejemplificada por la colección U y la llamaremos **clase universal**.

Una **clase** $\mathcal{A}$ es cualquier colección que tienen alguna propiedad común que las define. Por ejemplo, la clase de grupos abelianos.

Un **conjunto** es una clase que pertenece al menos a otra clase.

Una **clase propia** es una clase que no es un conjunto. Observemos que la clase universal U es una clase propia. Podemos hacer ciertas construcciones con las clases al igual que en conjuntos

por ejemplo la unión de clases, la intersección de clases; etc.

1.2 Definición de categoría

Definición 1.2.1. *Una categoría $\mathfrak{C}$ consta de:*

1. *Una clase denotada por* $\boldsymbol{Ob}(\mathfrak{C})$.

A los elementos de $Ob(\mathfrak{C})$ los llamaremos ***objetos*** *y serán denotados por letras mayúsculas A, B, C,...*

2. *Para cada par de objetos $A, B \in Ob(\mathfrak{C})$, se da una clase $\boldsymbol{Mor}_{\mathfrak{C}}(A,B)$ cuyos elementos serán llamados flechas o morfismos de A en B. Cada elemento $f \in Mor_{\mathfrak{C}}(A,B)$ será denotado por $f : A \to B$ o $A \xrightarrow{f} B$.*

3. *Para cada terna $A, B, C \in Ob(\mathfrak{C})$ se tiene una aplicación*

$$\begin{array}{rcl} Mor_{\mathcal{C}}(A,B) \times Mor_{\mathcal{C}}(B,C) & \longrightarrow & Mor_{\mathcal{C}}(A,C) \\ (f,g) & \mapsto & g \circ f. \end{array}$$

   llamada composición de flechas, que satisface las siguientes condiciones:

   (i) Para cualesquiera $f \in Mor_{\mathcal{C}}(A,B)$, $g \in Mor_{\mathcal{C}}(B,C)$ y $h \in Mor_{\mathcal{C}}(C,D)$ se tiene que $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$. Por lo tanto, la composición de flechas es asociativa.

   (ii) Para cada $A \in Ob(\mathfrak{C})$, existe una flecha $1_A \in Mor_{\mathcal{C}}(A,A)$ llamada flecha identidad, tal que para cualesquiera $f \in Mor_{\mathcal{C}}(B,A)$ y $g \in Mor_{\mathcal{C}}(A,B)$ tenemos que $1_A \circ f = f$ y $g \circ 1_A = g$.

Observación 1.2.2.

1. *La flecha identidad, cuya existencia está garantizada por la condición (ii) , es única.*

2. *Las flechas son disjuntas dos a dos es decir si f y g son dos flechas en una categoría $\mathfrak{C}$ tal que $f = g$ con $f \in Mor_{\mathfrak{C}}(A.B)$ y $g \in Mor_{\mathfrak{C}}(C,D)$ entonces $A = C$ y $B = D$.*

3. *La clase de flechas de una categoría* $\mathfrak{C}$ *es* $Arr(\mathfrak{C}) := \bigcup_{A,B\in\mathfrak{C}} Mor_{\mathfrak{C}}(A,B)$

Ejemplo 1.2.3.

1. *La categoría de conjuntos* ***Set*** *cuyos objetos son los conjuntos y cuyas flechas son las funciones.*

2. *La categoría de grupos* ***Grp*** *cuyos objetos son los grupos y cuyas flechas son los homomorfismos de grupos.*

3. *La categoría de grupos abelianos o conmutativos* ***Ab*** *cuyos objetos son los grupos abelianos y cuyas flechas son los homomorfismos de grupos abelianos.*

4. *La categoría de anillos* ***Rng*** *cuyos objetos son los anillos, no necesariamente con unidad, y cuyas flechas son los homomorfismos de anillos.*

5. *La categoría de anillos con unidad* ***Ring*** *cuyos objetos son los anillos con unidad y cuyas flechas son los homomorfismos de anillos que respetan la unidad.*

6. *La categoría de anillos conmutativos con unidad* ***CRing*** *cuyos objetos son los anillos conmutativos con unidad y cuyas flechas son los homomorfismos de anillos conmutativos que respetan la unidad.*

7. *Sea* R *un anillo con unidad. La categoría de módulos a izquierda* R-***Mod*** *cuyos objetos son módulos a izquierda y cuyas flechas son los homomorfismos de* R*-módulos a izquierda. También tenemos la cate-*

*goría de módulos a derecha **Mod**-R cuyos objetos son los R-módulos a derecha y cuyas flechas son los homomorfismos de R-módulos a derecha.*

8. *La categoría de cuerpos **Fld** cuyos objetos son los cuerpos y cuyas flechas son los homomorfismos de cuerpos.*

9. *Si $\mathbb{K}$ es un cuerpo, tenemos la categoría de los $\mathbb{K}$-espacios vectoriales $\boldsymbol{Vect}_{\mathbb{K}}$ cuyos objetos son los $\mathbb{K}$-espacios vectoriales y cuyas flechas son las transformaciones lineales.*

10. *La categoría de los $\mathbb{K}$-espacios vectoriales de dimensión finita $\boldsymbol{Vect}_{\mathbb{K},fin}$ cuyos objetos son los $\mathbb{K}$-espacios vectoriales de dimensión finita y cuyas flechas son las transformaciones lineales de $\mathbb{K}$-espacios vectoriales de dimensión finita.*

11. *La categoría de espacios topológicos **Top** cuyos objetos son los espacios topológicos y cuyas flechas son aplicaciones continuas entre espacios topológicos.*

12. *La categoría formada por subconjuntos abiertos de un espacio topológico X es denotada por $\boldsymbol{Top}(X)$ donde las únicas flechas entre estos objetos son las inclusiones, entonces $Mor_{\boldsymbol{Top}(X)}(U,V) = \emptyset$ si $U \nsubseteq V$ y que $Mor_{\boldsymbol{Top}(X)}(U,V)$ admite un solo elemento si $V \subseteq U$.*

13. *La categoría de espacios métricos **Met** cuyos objetos son espacios métricos y cuyas flechas son aplicaciones continuas entre espacios métricos.*

14. *La categoría $\boldsymbol{Met}_U$ cuyos objetos son espacios métricos y cuyas flechas son aplicaciones uniformemente continuas entre espacios métricos.*

15. *La categoría* $\boldsymbol{Met}_C$ *cuyos objetos son espacioes métricos y cuyas flechas son contracciones débiles entre espacios métricos.*

16. *La categoría* $\boldsymbol{Top}_{Abta}$ *cuyos objetos son los espacios topológicos y cuyas flechas son aplicaciones abiertas entre espacios topológicos.*

17. *La categoría de conjuntos finitos* $\boldsymbol{Set}_{fin}$ *donde los objetos son conjuntos finitos y las flechas son funciones entre conjuntos finitos.*

18. *La categoría de espacios topológicos de Hausdorff* ***Haus*** *donde los objetos son espacios topológicos de Hausdorff y las flechas son aplicaciones continuas entre espacios topológicos de Hausdorff.*

1.3 Categorías localmente pequeñas

Definición 1.3.1. *Una categoría* $\mathfrak{C}$ *es* ***localmente pequeña*** *si para cada par* $A, B \in Ob(\mathfrak{C})$, *la categoía* $\boldsymbol{Mor}_{\mathfrak{C}}(A, B)$ *es un conjunto.*

Los ejemplos colocados anteriormente son categorías localmente pequeñas.

1.4 Categorías pequeñas

Definición 1.4.1. *Una categoría* $\mathfrak{C}$ *es* ***pequeña*** *si* $Ob(\mathfrak{C})$ *es un conjunto.*

Ejemplo 1.4.2.

1. *La categoría vacia* $\boldsymbol{0}$, *sin objetos y por lo tanto sin flechas.*

2. *La categoría uno* $\boldsymbol{1}$ *que tiene un solo objeto y una sola flecha, es decir* $Ob(\boldsymbol{1}) = \{A\}$ *y* $Mor(\boldsymbol{1}) = \{1_A\}$.

3. *La categoría dos con tres flechas* $\mathbf{2}^3$ *que tiene dos objetos y tres flechas, es decir,*

   $Ob(\mathbf{2}) = \{A, B\}$ *y* $Mor(\mathbf{2}) = \{1_A : A \to A, 1_B : B \to B, f : A \to B\}$.

4. *La categoría dos con cuatro flechas* $\mathbf{2}^4$ *que tiene dos objetos y cuatro flechas, es decir,*

   $Ob(\mathbf{2}) = \{A, B\}$ *y*

   $Mor(\mathbf{2}) = \{1_A : A \to A, 1_B : B \to B, f : A \to B, g : B \to A\}$.

5. *Todo grupo* G *puede ser considerado como una categoría que consiste de un solo objeto donde las flechas son los elementos de* G *y la composición de las flechas es la operación en* G.

1.5 Subcategorías

Definición 1.5.1. *Sean* $\mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ *dos categorías. Diremos que* $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{D}$ *es una* ***subcategoría*** *de* $\mathfrak{D}$ *si cumple lo siguiente:*

1. $Ob(\mathfrak{C}) \subset Ob(\mathfrak{D})$.

2. $Mor_{\mathfrak{C}}(A, B) \subset Mor_{\mathfrak{D}}(A, B)$*, para cualesquiera* $A, B \in Ob(\mathfrak{C})$.

3. *La composición de morfismos en* $\mathfrak{C}$ *es la misma que en* $\mathfrak{D}$.

4. *Los morfismos identidad en* $\mathfrak{C}$ *son los mismos que los de* $\mathfrak{D}$.

Ejemplo 1.5.2.

1. *La categoría* ***Top*** *es una subcategoría de la categoría* ***Set***.

2. *La categoría* ***Ab*** *es una subcategoría de la categoría* ***Grp***.

3. *La categoría* ***Ring*** *es una subcategoría de la categoría* ***Rng***.

Observación 1.5.3.

Existen categorías que tienen los mismos objetos, sin embargo ninguna de ellas es una subcategoría de la otra. Por ejemplo, en ***Top*** *y* $\boldsymbol{Top}_{Abta}$ *existen aplicaciones continuas no abiertas y aplicaciones abiertas no continuas.*

1.6 Subcategorías plenas

Definición 1.6.1. *Sean* $\mathfrak{C}$ *y* $\mathfrak{D}$ *dos categorías tales que* $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{D}$.

$\mathfrak{C}$ *es llamada una* ***subcategoría plena*** *de* $\mathfrak{D}$ *si* $Mor_{\mathfrak{C}}(A, B) = Mor_{\mathfrak{D}}(A, B)$ *para todos los objetos* $A, B \in Ob(\mathfrak{C})$.

Ejemplo 1.6.2.

1. ***Ab*** $\subset$ ***Grp*** *es una subcategoría plena.*

2. $\boldsymbol{Set}_{fin} \subset$ ***Set*** *es una subcategoría plena.*

3. $\boldsymbol{Met}_U \subset$ ***Met*** *no es una subcategoría plena, pues no toda aplicación continua es uniformemente continua.*

   Por ejemplo

$$\begin{aligned} f :< 0, +\infty > &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{x} \end{aligned}$$

   es una flecha o morfismo en ***Met*** *pero no es una flecha en* $\boldsymbol{Met}_U$.

4. $\boldsymbol{Met}_C \subset \boldsymbol{Met}$ *no es una subcategoría plena.*

5. $\boldsymbol{Met}_C \subset \boldsymbol{Met}_U$ *no es una subcategoría plena.*

6. $\boldsymbol{Ring} \subset \boldsymbol{Rng}$ *no es una subcategoría plena.*

1.7 Construyendo categorías

Mostraremos ahora algunas formas de construir nuevas categorías a partir de las conocidas.

1. **La categoría opuesta** $\mathfrak{C}^{op}$ de una categoría $\mathfrak{C}$ tiene los mismos objetos que $\mathfrak{C}$ y para cada flecha $f \in Mor_{\mathfrak{C}}(B, A)$ en $\mathfrak{C}$ con $A, B \in \mathfrak{C}$ se tiene que $f^{op} \in Mor_{\mathfrak{C}^{op}}(A, B)$ es una flecha en $\mathfrak{C}^{op}$.

   Para cada terna $A, B, C \in Ob(\mathfrak{C}^{\mathbf{op}})$ definimos la composición

$$\begin{array}{rcl} \circ : Mor_{\mathcal{C}^{op}}(A, B) \times Mor_{\mathcal{C}^{op}}(B, C) & \longrightarrow & Mor_{\mathcal{C}^{op}}(A, C) \\ (f^{op}, g^{op}) & \longmapsto & g^{op} \circ f^{op} = (f \circ g)^{op} \end{array}$$

   y si suponemos que $1_A^{op} = 1_A$ entonces $\mathcal{C}^{op}$ es una categoría.

2. Sean $\mathfrak{C}$ y $\mathcal{D}$ dos categorías.

   La categoría producto $\mathfrak{C} \times \mathfrak{D}$ tiene como objetos a los pares (A, B) donde $A \in \mathfrak{C}$, $B \in \mathfrak{D}$, y sus flechas $(A, C) \to (B, D)$ son pares (f, g) donde $f : A \to B$ y $g : C \to D$ son flechas en $\mathfrak{C}$ y $\mathcal{D}$ respectivamente.
   La composición se define coordenada a coordenada y si suponemos que

$1_{\mathfrak{C}\times\mathfrak{D}} = (1_{\mathfrak{C}}, 1_{\mathcal{D}})$ entonces es facil ver que $\mathfrak{C} \times \mathcal{D}$ es una categoría.

3. Sea $\mathfrak{C}$ una categoría y $X \in \mathfrak{C}$, definimos la categoría $(\mathfrak{C}/X)$ donde sus objetos son flechas $f : U \to X$ en $\mathfrak{C}$ y cuyas flechas son $f \to g$ donde $f : U \to X$ y $g : V \to X$ son flechas en $\mathfrak{C}$ tal que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[dl] \arrow[dr, "f"] & \\ V \arrow[rr, "g"'] & & X \end{tikzcd}$$

conmuta.

4. Sea $\mathfrak{C}$ una categoría, definimos **la categoría de flechas** en $\mathfrak{C}$ denotada por $Arr(\mathfrak{C})$ donde los objetos son flechas $f : X \to U$ en $\mathfrak{C}$ y las flechas son $f \to g$ donde $f : X \to U$ y $g : Y \to V$ son flechas en $\mathfrak{C}$ tal que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\ U \arrow[r] & V \end{tikzcd}$$

conmuta.

De ahora en adelante, escribiremos $A \in \mathfrak{C}$ en lugar de escribir $A \in Ob(\mathfrak{C})$.

1.8 Flechas especiales

En esta sección vamos a estudiar propiedades específicas de las flechas en una categoría fija $\mathfrak{C}$.

Definición 1.8.1. *Una flecha $f : A \to B$ en $\mathfrak{C}$ es un* ***monomorfismo*** *o $f : A \to B$ es un monomorfismo en $\mathfrak{C}$ si para cada objeto $C \in \mathfrak{C}$ y para cualesquiera $g, h : C \to A$ flechas en $\mathfrak{C}$ se tiene que $f \circ g = f \circ h$, entonces $g = h$.*

Proposición 1.8.2. *Sean $f : A \to B$, $g : B \to C$ flechas en $\mathfrak{C}$. Entonces se cumplen:*

1. *Si $g \circ f : A \to C$ es un monomorfismo entonces f es monomorfismo.*
2. *Si f y g son monomorfismos entonces $g \circ f : A \to C$ es un monomorfismo.*

Demostración:

1. *Sean $D \in \mathfrak{C}$ y $\varphi, \psi : D \to A$ flechas en $\mathfrak{C}$ tales que $f \circ \varphi = f \circ \psi$. Como $f \circ \varphi = f \circ \psi$ entonces $g \circ (f \circ \varphi) = g \circ (f \circ \psi)$, luego por la asociatividad tenemos que $(g \circ f) \circ \varphi = (g \circ f) \circ \psi$, y como $g \circ f$ es monomorfismo entonces $\varphi = \psi$. Luego f es un monomorfismo.*
2. *Sean $D \in \mathfrak{C}$ y $\varphi, \psi : D \to A$ flechas en $\mathfrak{C}$ tales que $(g \circ f) \circ \varphi = (g \circ f) \circ \psi$. Como $(g \circ f) \circ \varphi = (g \circ f) \circ \psi$, entonces por la asociatividad tenemos que $g \circ (f \circ \varphi) = g \circ (f \circ \psi)$ y como g es monomorfismo entonces*

$f \circ \varphi = f \circ \psi$, luego por ser f monomorfismo obtenemos de la última igualdad que $\varphi = \psi$. Por tanto $g \circ f$ es un monomorfismo.

$\blacksquare$

Ejemplo 1.8.3.

1. *En la categoría de conjuntos **Set** una flecha es un monomorfismo sí y solo si es una aplicación inyectiva.*

   En efecto:

   *$(\Rightarrow)$ Sea $f : A \to B$ un monomorfismo en **Set** y sean $a, b \in A$ tales que $a \neq b$. Consideremos $\{m\} \in$ **Set** un conjunto unitario y definimos dos funciones*

   $$\begin{aligned} h : \{m\} &\longrightarrow A \\ m &\mapsto a. \end{aligned}$$

   y

   $$\begin{aligned} g : \{m\} &\longrightarrow A \\ m &\mapsto b, \end{aligned}$$

   como $g \neq h$ entonces $f \circ g \neq f \circ h$, pues f es un monomorfismo luego $f(a) \neq f(b)$. Por lo tanto f es inyectiva.

   $(\Leftarrow)$ Sea $f : A \to B$ inyectiva y sean $g, h : D \to A$ tales que $g \neq h$ entonces $g(a) \neq h(a)$ para algún $a \in D$. Ya que f es inyectiva y $g(a) \neq h(a)$ con $g(a), h(a) \in A$ entonces $f(g(a)) \neq f(h(a))$ luego $f \circ g \neq f \circ h$.

   *Por tanto f es un monomorfismo en **Set**.*

2. *En la categoría **Mod**-R una flecha es un monomorfismo sí y solo si es un homomorfismo inyectivo.*

3. *En la categoría* ***Grp*** *una flecha es un monomorfismo sí y solo si es un homomorfismo inyectivo.*

Definición 1.8.4. *Una flecha $f : A \to B$ en $\mathfrak{C}$ es un* ***epimorfismo*** *o f es un epimorfismo en $\mathfrak{C}$ si para cada $D \in \mathfrak{C}$ y para cada $g, h : B \to D$ se tiene que $g \circ f = h \circ f$ entonces $g = h$.*

Proposición 1.8.5. *Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ dos flechas en $\mathfrak{C}$.*

Se cumple lo siguiente:

1. *Si $g \circ f : A \to C$ es epimorfismo entonces g es epimorfismo.*

2. *Si g y f son epimorfismos entonces $g \circ f : A \to C$ es epimorfismo.*

Demostración:

1. *Sean $D \in \mathfrak{C}$ y $\varphi, \psi : C \to D$ flechas en $\mathfrak{C}$ tales que $\varphi \circ g = \psi \circ g$. Tenemos que $\varphi \circ (g \circ f) = (\varphi \circ g) \circ f = (\psi \circ g) \circ f = \psi \circ (g \circ f)$, luego $\varphi \circ (g \circ f) = \psi \circ (g \circ f)$ y esta última igualdad implica que $\varphi = \psi$ pues $g \circ f$ es un epimorfismo. Por lo tanto g es un epimorfismo.*

2. *Sean $D \in \mathfrak{C}$ y $\varphi, \psi : C \to D$ flechas en $\mathfrak{C}$ tales que $\varphi \circ (g \circ f) = \psi \circ (g \circ f)$. Tenemos que $(\varphi \circ g) \circ f = \varphi \circ (g \circ f) = \psi \circ (g \circ f) = (\psi \circ g) \circ f$ entonces $(\varphi \circ g) \circ f = (\psi \circ g) \circ f$, luego $\varphi \circ g = \psi \circ g$ pues f es epimorfismo. De la última igualdad se tiene que $\varphi = \psi$ ya que g es epimorfismo. Por lo tanto $g \circ f$ es un epimorfismo en $\mathfrak{C}$.*

$\blacksquare$

Ejemplo 1.8.6.

1. *En la categoría* ***Set*** *una flecha es un epimorfismo sí y solo si es una aplicación sobreyectiva.*

   En efecto:

   (⇒) Sea $f : A \to B$ *un epimorfismo en* ***Set****. Supongamos que existe un* $b_0 \in B - f(A)$ *y definimos* $g, h : B \to \{0, 1\}$ *de modo que* $h(b) = g(b)$*, para todo* $b \neq b_0$ *con* $h(b_0) = 1$ *y* $g(b_0) = 0$*. Entonces se cumple que* $h \circ f = g \circ f$ *y esto implica que* $h = g$ *pues* f *es epimorfismo. La última igualdad es una contradicción ya que* $h \neq g$*. Luego* $B = f(A)$*. Por lo tanto* f *es sobreyectiva.*

   (⇐) Sea $f : A \to B$ *una aplicación sobreyectiva y sean* $g, h : B \to D$ *flechas en* $\mathfrak{C}$ *tales que* $g \circ f = h \circ f$*. Dado* $b \in B$ *entonces existe* $a \in A$ *tal que* $f(a) = b$ *pues* f *es sobreyectiva. Tenemos que*

   $g(b) = g(f(a)) = (g \circ f)(a) = (h \circ f)(a) = h(f(a)) = h(b)$ *entonces* $g = h$ *pues tomamos* b *arbitrario. Por lo tanto* f *es epimorfismo en* $\mathfrak{C}$*.*

2. *En las categorías* ***Mod****-*R *y* R*-****Mod*** *se cumple que una flecha es epimorfismo sí y solo si es un homomorfismo sobreyectivo.*

3. *En la categoría* ***Grp*** *una flecha es un epimorfismo sí y solo si es un homomorfismo sobreyectivo.*

4. *En la categoría* ***Ring*** *todo homomorfismo sobreyectivo es un epimorfismo. Pero no todo epimorfismo es un homorfismo sobreyectivo.*

   En efecto:

*Consideremos el homomorfismo inclusión $i : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ que no es sobreyectivo sin embargo es un epimorfismo pues dados $R \in$ **Ring** y $g, h : \mathbb{Q} \to R$ tales que $g \circ i = h \circ i$ entonces tenemos que $g = h$ pues $g(\frac{a}{b}) = g(ab^{-1}) = g(a)g(b^{-1}) = g(a)g(b)^{-1} = g(i(a))g(i(b))^{-1} = (g \circ i)(a)(g \circ i)(b)^{-1} = (h \circ i)(a)(h \circ i)(b)^{-1} = h(i(a))h(i(b))^{-1} = h(a)h(b)^{-1} = h(a)h(b^{-1}) = h(ab^{-1}) = h(\frac{a}{b})$, para todo $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ con $b \neq 0$.*

5. *Para cada $A \in \mathfrak{C}$ se cumple que la flecha identidad 1_A es un monomorfismo y un epimorfismo.*

Definición 1.8.7. *Una flecha $f : A \to B$ en $\mathfrak{C}$ es **inversible a izquierda** si existe una flecha $g : B \to A$ en $\mathfrak{C}$ tal que $g \circ f = 1_A$.*

Definición 1.8.8. *Una flecha $\varphi : A \to B$ en $\mathfrak{C}$ es **inversible a derecha** si existe una flecha $\psi : B \to A$ en $\mathfrak{C}$ tal que $\varphi \circ \psi = 1_B$.*

Es fácil ver que una flecha $f : A \to B$ es inversible a izquierda en $\mathfrak{C}$ sí y solo si la flecha $f^{op} : A \to B$ es inversible a derecha en $\mathfrak{C}^{op}$.

Proposición 1.8.9. *Dada una flecha $f : A \to B$ en $\mathfrak{C}$.*

Se cumple lo siguiente:

1. *Si f es inversible a izquierda entonces f es un monomorfismo.*

2. *Si f es inversible a derecha entonces f es un epimorfismo.*

Demostración:

1. *Dada que la flecha $f : A \to B$ es inversible a izquierda entonces existe una flecha $g : B \to A$ en $\mathfrak{C}$ tal que $g \circ f = 1_A$. Sean $D \in \mathfrak{C}$ y flechas $\psi, h : D \to A$ en $\mathfrak{C}$ tales que $f \circ \psi = f \circ h$. Tenemos que $h = (g \circ f) \circ h = g \circ (f \circ h) = g \circ (f \circ \psi) = (g \circ f) \circ \psi = \psi$ luego se tiene que $h = \psi$. Por lo tanto f es un monomorfismo.*

2. *Dada que la flecha $f : A \to B$ es inversible a derecha entonces existe una flecha $\psi : B \to A$ en $\mathfrak{C}$ tal que $f \circ \psi = 1_B$. Sean $D \in \mathfrak{C}$ y flechas $g, h : B \to D$ en $\mathfrak{C}$ tales que $g \circ f = h \circ f$. Tenemos que $h = h \circ 1_B = h \circ (f \circ \psi) = (h \circ f) \circ \psi = (g \circ f) \circ \psi = g \circ (f \circ \psi) = g \circ 1_A = g$, entonces se tiene que $h = g$. Por lo tanto f es un epimorfismo.*

$\blacksquare$

Observación 1.8.10.

1. *En la categoría **Mod**-$\mathbb{Z}$ vamos a dar un ejemplo de un epimorfismo que no es inversible a derecha. Consideremos los $\mathbb{Z}$-módulos $\mathbb{Z}$, $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$ y el $\mathbb{Z}$-homomorfismo $\boldsymbol{f} : \mathbb{Z} \to \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$ que es sobreyectivo, luego $\boldsymbol{f}$ es un epimorfismo ya que estamos en la categoría **Mod**-$\mathbb{Z}$.*

   Ahora supongamos que $\boldsymbol{f} : \mathbb{Z} \to \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$ es inversible a derecha, luego existe un $g : \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \to \mathbb{Z}$ tal que $\boldsymbol{f} \circ g = 1_{\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}}$. Por otro lado sabemos que el único $\mathbb{Z}$-homomorfismo $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \to \mathbb{Z}$ es el cero luego tenemos una contradicción pues $\boldsymbol{f} \circ g = \boldsymbol{f} \circ 0 = 0$ donde 0 es el $\mathbb{Z}$- homomorfismo cero. Por lo tanto $\boldsymbol{f}$ no es inversible a derecha.

2. *En la categoría **Ring** vamos a dar un ejemplo de un monomorfismo que no es inversible a izquierda. Consideremos el homomorfismo inclusión $\boldsymbol{i} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ que es inyectivo, luego $\boldsymbol{i}$ es un monomorfismo ya que estamos en la categoría **Ring**. Ahora supongamos que $\boldsymbol{i} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ es inversible a izquierda entonces existe un $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$ tal que $g \circ \boldsymbol{i} = 1_{\mathbb{Z}}$. Entonces tenemos que $(g \circ \boldsymbol{i})(1) = 1_{\mathbb{Z}}(1)$ luego $1 = g(1) = g(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) = 2g(\frac{1}{2})$ entonces $g(\frac{1}{2}) \in \mathbb{Z}$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto $\boldsymbol{i}$ no es inversible a izquierda.*

Definición 1.8.11. *Una flecha $f : A \to B$ en $\mathfrak{C}$ es llamada un **isomorfismo** o un isomorfismo en $\mathfrak{C}$ si existe una flecha $g : B \to A$ en $\mathfrak{C}$ tal que $f \circ g = 1_B$ y $g \circ f = 1_A$.*
La flecha g será llamada la inversa de f y la denotaremos por f^{-1}.
Para indicar que dos objetos A y B son isomorfos en $\mathfrak{C}$, esto es, que existe una flecha $A \to B$ en $\mathfrak{C}$ que es un isomorfismo, escribiremos $A \cong B$.

Ejemplo 1.8.12.

1. *En la categoría **Set** las funciones biyectivas son isomorfismos.*

2. *En la categoría **Grp** los homomorfismos biyectivos son isomorfismos.*

3. *En la categoría **Top** los homeomorfismos son isomorfismos.*

Ahora veremos una caracterización de la definición anterior.

Proposición 1.8.13. *Una flecha $f : A \to B$ en $\mathfrak{C}$ es un isomorfismo sí y solo si f es inversible a izquierda e inversible a derecha.*

Demostración:

($\Rightarrow$) Por ser f un isomorfismo entonces existe una flecha $g : B \to A$ tal que $f \circ g = 1_B$ y $g \circ f = 1_A$. Como $f \circ g = 1_B$ y $g \circ f = 1_A$ tenemos que f es inversible a derecha y que f es inversible a izquierda respectivamente.

($\Leftarrow$) Dada que la flecha f es inversible a izquierda entonces existe una flecha $g : B \to A$ en $\mathfrak{C}$ tal que $g \circ f = 1_A$ y también por ser f inversible a derecha existe una flecha $h : B \to A$ tal que $f \circ h = 1_B$. Tenemos que $h = 1_A \circ h = (g \circ f) \circ h = g \circ (f \circ h) = g \circ 1_B = g$, luego $h = g$ y esto implica que existe una $\psi = h = g$ tal que $\psi \circ f = 1_A$ y $f \circ \psi = 1_B$. Por lo tanto f es un isomorfismo.

$\blacksquare$

Observación 1.8.14.

1. *Observemos que en la definición anterior la flecha g es única. En efecto: Supongamos que existe otra flecha $h : B \to A$ tal que $h \circ f = 1_A$ y $f \circ h = 1_B$. Tenemos lo siguiente:*
   $h = h \circ 1_B = h \circ (f \circ h) = (h \circ f) \circ h = (g \circ f) \circ h = g \circ (f \circ h) = g \circ 1_B = g.$

2. *En general en cualquier categoría donde los objetos sean conjuntos (quizá con alguna estructura adicional) y las flechas sean aplicaciones entre esos conjuntos (quizá con alguna condicií adicional) todo isomorfismo es una biyección. En efecto: El motivo es que desde el punto de vista puramente conjuntista si una flecha $f : A \to B$ en $\mathfrak{C}$ es un iso-*

morfismo entonces existe una flecha $g : B \to A$ en $\mathfrak{C}$ tal que $f \circ g = 1_B$ y $g \circ f = 1_A$, luego tenemos que f es una biyección.

3. *Para que una flecha biyectiva sea un isomorfismo tiene que ocurrir que la inversa de una flecha biyectiva sea también una flecha, esto ocurre en algunas categorías como la de grupos, anillos y módulos; pero por ejemplo esto no ocurre en la categoría de los espacios topológicos pues una función biyectiva continua no tiene porque tener inversa continua.*

4. *De las dos últimas proposiciones se obtiene que si una flecha en $\mathfrak{C}$ es un isomorfismo entonces es un monomorfismo y un epimorfismo en $\mathfrak{C}$.*

5. *Si una flecha en una categoría $\mathfrak{C}$ es un monomorfismo y un epimorfismo entonces no necesariamente dicha flecha es un isomorfismo. En efecto: En la categoría **Ring** consideremos los objetos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y el homomorfismo inclusión $\boldsymbol{i} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ que ya sabemos que es un monomorfismo y un epimorfismo pero no es inversible a izquierda. Por lo tanto $\boldsymbol{i} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ no es un isomorfismo.*

1.9 Tipos de objetos

En esta sección hablaremos de tres tipos de objetos y trataremos de hallarlos en las categorías conocidas.

Definición 1.9.1. *Sea $\mathfrak{C}$ una categoría.*

Un objeto $A \in \mathfrak{C}$ se dice:

1. ***Inicial*** *si para cada* $B \in \mathfrak{C}$ *existe una única flecha* $f : A \to B$ *en* $\mathfrak{C}$.

2. ***Final o terminal*** *si para cada* $B \in \mathfrak{C}$ *existe una única flecha* $f : B \to A$ *en* $\mathfrak{C}$.

3. ***Cero*** *si es inicial y terminal.*

Observación 1.9.2.

1. *En una categoría arbitraria no necesariamente existen objetos iniciales y finales.*

2. *Dos objetos iniciales en una misma categoría son isomorfos, tal situación también se da para objetos finales y objetos cero.*

3. *Cualquier objeto que sea isomorfo a un objeto inicial es un objeto inicial. Lo mismo se da para objetos finales y objetos cero.*

Ejemplo 1.9.3.

1. *En la categoría* ***Grp*** *cualquier grupo trivial es un objeto cero.*

2. *En la categoría* ***Set*** *el conjunto vacío es el único objeto inicial. Mientras que cualquier conjunto unitario es un objeto final. Esta categoría no posee objeto cero.*

3. *En la categoría* ***Ring*** *el objeto* $\mathbb{Z}$ *es inicial pero no es un objeto final.*

Chapter 2

Funtores

2.1 Definición de funtor covariante

Definición 2.1.1. *Sean $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$ dos categorías.*

*Un funtor **covariante** o simplemente un funtor $\mathcal{F}$ que va de $\mathfrak{C}$ a $\mathfrak{D}$ se denota por $\mathcal{F} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ y por definición cumple:*

1. *Para cada $A \in \mathfrak{C}$ se tiene que $\mathcal{F}A \in \mathfrak{D}$.*

2. *Para cada par de objetos $A, B \in \mathfrak{C}$ y para cada flecha $f : A \to B$ en $\mathfrak{C}$ tenemos que $\mathcal{F}f : \mathcal{F}A \to \mathcal{F}B$ es una flecha en $\mathfrak{D}$ tal que:*

   i. Para cada $A \in \mathfrak{C}$ se tiene que $\mathcal{F}1_A = 1_{\mathcal{F}A}$.

   ii. Para cualesquiera $A, B, C \in \mathfrak{C}$ y $f : A \to B$, $g : B \to C$ flechas en $\mathfrak{C}$ se tiene que $\mathcal{F}(g \circ f) = \mathcal{F}g \circ \mathcal{F}f$.

Ejemplo 2.1.2.

1. *Toda categoría $\mathfrak{C}$ define un funtor $1_{\mathfrak{C}} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}$ de la siguiente manera:*

En objetos: *Para cada* $A \in \mathfrak{C}$ *tenemos que* $1_{\mathfrak{C}}A := A \in \mathfrak{C}$.

En flechas: *Para cada flecha* $f : A \to B$ *en* $\mathfrak{C}$ *tenemos que la flecha* $1_{\mathfrak{C}}f := f$ *está en* $\mathfrak{C}$. *Así definido* $1_{\mathfrak{C}}$ *es un funtor llamado funtor identidad.*

2. *Dado* $X \in \mathfrak{D}$ *fijo. Definimos* $\mathcal{F} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ *de la siguiente manera:*

   En objetos: *Para cada* $A \in \mathfrak{C}$ *tenemos que* $\mathcal{F}A := X \in \mathfrak{D}$.

   En flechas: *Para cada flecha* $f : A \to B$ *en* $\mathfrak{C}$ *tenemos que la flecha* $\mathcal{F}f := 1_X$ *está en* $\mathfrak{D}$. *Así definido* $\mathcal{F}$ *es un funtor llamado funtor constante.*

3. *Sea* $\mathfrak{C}$ *una subcategoría de* $\mathfrak{D}$. *Definimos* $\boldsymbol{i} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ *de la siguiente manera:*

   En objetos: *Para cada* $A \in \mathfrak{C}$ *tenemos que* $\boldsymbol{i}A := A \in \mathfrak{D}$.

   En flechas: *Para cada flecha* $f : A \to B$ *en* $\mathfrak{C}$ *tenemos que la flecha* $\boldsymbol{i}f := f$ *está en* $\mathfrak{D}$. *Definido* $\boldsymbol{i}$ *de esa manera es un funtor llamado funtor inclusión.*

4. *Sean* $\mathfrak{C}$ *y* $\mathfrak{D}$ *dos categorías. Definimos* $\pi_{\mathfrak{C}} : \mathfrak{C} \times \mathfrak{D} \to \mathfrak{C}$ *tal que* $\pi_{\mathfrak{C}}(A, B) := A$ *para todo* $A \in \mathfrak{C}$, *y todo* $B \in \mathfrak{D}$ *y* $\pi_{\mathfrak{C}}(f, g) := f$ *para toda flecha* f *en* $\mathfrak{C}$ *y toda flecha* g *en* $\mathfrak{D}$. *Así definido* $\pi_{\mathfrak{C}}$ *es un funtor llamado el funtor proyección.*

5. *Similarmente definimos* $\pi_{\mathfrak{D}} : \mathfrak{C} \times \mathfrak{D} \to \mathfrak{D}$ *tal que* $\pi_{\mathfrak{D}}(A, B) := B$ *para todo* $A \in \mathfrak{C}$, *para todo* $B \in \mathfrak{D}$ *y* $\pi_{\mathfrak{D}}(f, g) := g$ *para toda flecha* f *en* $\mathfrak{C}$

y toda flecha g en $\mathfrak{D}$. Así definido $\pi_{\mathfrak{D}}$ es un funtor llamado el funtor proyección.

6. *Para cualquier categoría $\mathfrak{C}$ vamos a definir $\triangle : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C} \times \mathfrak{C}$ como $\triangle A := (A, A)$ para todo objeto $A \in \mathfrak{C}$ y $\triangle f := (f, f)$ para toda flecha f en $\mathfrak{C}$. Definido de esta manera $\triangle$ es un funtor llamado funtor diagonal.*

7. *Sean $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$ categorías y $\mathcal{F} : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$, $\mathcal{G} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ funtores.*

   Definimos $\mathcal{F} \times \mathcal{G} : \mathfrak{A} \times \mathfrak{C} \to \mathfrak{B} \times \mathfrak{D}$ como $(\mathcal{F} \times \mathcal{G})(A, C) := (\mathcal{F}A, \mathcal{G}C)$ para todo objeto $A \in \mathfrak{A}$, y todo objeto $C \in \mathfrak{C}$ y $(\mathcal{F} \times \mathcal{G})(f, g) := (\mathcal{F}f, \mathcal{G}g)$ para toda flecha $f \in \mathfrak{A}$ y toda flecha $g \in \mathfrak{C}$. No es dificil probar que $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$ es un funtor, llamado el funtor producto.

8. *El funtor $\mathcal{F}$: **Ab** $\to$ **Set** que olvida la estructura de grupo abeliano, por lo tanto $\mathcal{F}G := G$ como conjunto para todo grupo $G \in$ **Ab** y $\mathcal{F}f := f$ como función para todo homomorfismo f en **Ab** es llamado el funtor de olvido.*

   *En lugar de colocar la categoría **Ab** podemos colocar cualquier otra categoría como por ejemplo **Ring**, **Top**, **Mod**-R, etc y también serán funtores de olvidos.*

9. *Sean $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$ categorías y $\mathcal{F} : \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$, $\mathcal{G} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ funtores.*

   Vamos a definir un funtor $\mathcal{G} \circ \mathcal{F} : \mathfrak{B} \to \mathfrak{D}$ llamado el funtor composición de la siguiente manera: $(\mathcal{G} \circ \mathcal{F})A := \mathcal{G}(\mathcal{F}A)$ para todo objeto $A \in \mathfrak{B}$ y $(\mathcal{G} \circ \mathcal{F})f := \mathcal{G}(\mathcal{F}f)$ para toda flecha f en $\mathfrak{B}$.

10. *Para cada $X \in \mathfrak{C}$ donde $\mathfrak{C}$ es localmente pequeña definimos*

$\mathcal{H}^X : \mathfrak{C} \to \boldsymbol{Set}$ *de la siguiente manera:*

En objetos: *Para cada* $U \in \mathfrak{C}$ *tenemos que* $\mathcal{H}^X U := Mor_{\mathfrak{C}}(X, U)$

En flechas: *Para cada flecha* $f : U \to V$ *en* $\mathfrak{C}$ *tenemos que*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{H}^X f : \mathcal{H}^X U := Mor_{\mathfrak{C}}(X, U) & \longrightarrow & \mathcal{H}^X V := Mor(X, V) \\ g & \mapsto & \mathcal{H}^X f(g) := g \circ f \end{array}$$

es una flecha en $\boldsymbol{Set}$.

Así definido $\mathcal{H}^X$ *es un funtor covariante.*

2.2 Definición de funtor contravariante

Definición 2.2.1. *Sean* $\mathfrak{C}$ *y* $\mathfrak{D}$ *categorías.*

Un funtor ***contravariante*** $\mathcal{F}$ *que va de* $\mathfrak{C}$ *a* $\mathfrak{D}$ *es denotado por* $\mathcal{F} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ *y se define como sigue:*

1. *Para cada* $A \in \mathfrak{C}$ *se tiene que* $\mathcal{F}A \in \mathfrak{D}$.

2. *Para cada par de objetos* $A, B \in \mathfrak{C}$ *y para cada flecha* $f : A \to B$ *en* $\mathfrak{C}$ *tenemos que* $\mathcal{F}f : \mathcal{F}B \to \mathcal{F}A$ *es una flecha en* $\mathfrak{D}$ *tal que:*

   i. Para cada $A \in \mathfrak{C}$ *se tiene que* $\mathcal{F}1_A = 1_{\mathcal{F}A}$.

   ii. Para cada $A, B, C \in \mathfrak{C}$ *y para cada* $f : A \to B$, $g : B \to C$ *flechas en* $\mathfrak{C}$ *se tiene que* $\mathcal{F}(g \circ f) = \mathcal{F}f \circ \mathcal{F}g$.

Ejemplo 2.2.2.

1. *Sean* $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ *y* $\mathfrak{D}$ *categorías. Dado* $\mathcal{F} : \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$ *un funtor covariante o simplemente un funtor y* $\mathcal{G} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ *un funtor contravariante entonces* $\mathcal{G} \circ \mathcal{F} : \mathfrak{B} \to \mathfrak{D}$ *es un funtor contravariante.*

2. *Sean* $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ *y* $\mathfrak{D}$ *categorías. Dado* $\mathcal{F} : \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$ *un funtor contravariante y* $\mathcal{G} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ *un funtor covariante entonces* $\mathcal{G} \circ \mathcal{F} : \mathfrak{B} \to \mathfrak{D}$ *es un funtor contravariante.*

3. *Para cada* $X \in \mathfrak{C}$ *donde* $\mathfrak{C}$ *es localmente pequeña definimos*

   $\mathcal{H}_X : \mathfrak{C} \to$ ***Set*** *de la siguiente manera:*

   En objetos*: Para cada* $U \in \mathfrak{C}$ *tenemos que* $\mathcal{H}_X U := Mor_{\mathfrak{C}}(U, X)$

   En flechas*: Para cada flecha* $f : U \to V$ *en* $\mathfrak{C}$ *tenemos que*

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_X f : \mathcal{H}_X V := Mor_{\mathfrak{C}}(V, X) &\longrightarrow \mathcal{H}_X U := Mor(U, X) \\ g &\mapsto \quad \mathcal{H}_X f(g) := g \circ f \end{aligned}$$

   es una flecha en ***Set****.*

   Así definido $\mathcal{H}_X$ *es un funtor contravariante.*

4. *Definimos* $\mathcal{F}$: ***Set*** $\to$ ***Set*** *de la siguiente manera:*

   En objetos*: Para cada* $A \in$ ***Set*** *definimos* $\mathcal{F}A := \mathcal{P}(A)$ *donde* $\mathcal{P}(A)$ *es el conjunto potencia de* A*.*

   En flechas*: Para cada flecha* $f : A \to B$ *en* ***Set*** *definimos la flecha*

$$\begin{aligned} \mathcal{F}f : \mathcal{F}B &\longrightarrow \quad \mathcal{F}A \\ B_1 &\mapsto \quad f^{-1}(B_1) \end{aligned}$$

*en **Set**.*

Así definido $\mathcal{F}$ es un funtor contravariante.

Definición 2.2.3. *Sean $A, B \in \mathfrak{C}$ y $\mathcal{F} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ funtor con $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$ categorías.*

1. *Decimos que el funtor $\mathcal{F} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ **preserva monomorfismos** si para cada monomorfismo $f \in \mathfrak{C}$ se tiene que la flecha $\mathcal{F}f \in \mathfrak{D}$ es monomorfismo.*

2. *Decimos que el funtor $\mathcal{F} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ **preserva epimorfismos** si para cada epimorfismo $f \in \mathfrak{C}$ se tiene que la flecha $\mathcal{F}f \in \mathfrak{D}$ es epimorfismo.*

3. *Decimos que el funtor $\mathcal{F} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ **preserva isomorfismos** si para cada isomorfismo $f \in \mathfrak{C}$ se tiene que la flecha $\mathcal{F}f \in \mathfrak{D}$ es isomorfismo.*

4. *Decimos que el funtor $\mathcal{F} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ **refleja monomorfismos** si para cada flecha $f \in \mathfrak{C}$ es tal que la flecha $\mathcal{F}f \in \mathfrak{D}$ es monomorfismo entonces $f \in \mathfrak{C}$ es monomorfismo.*

5. *Decimos que el funtor $\mathcal{F} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ **refleja epimorfismos** si para cada flecha $f \in \mathfrak{C}$ es tal que la flecha $\mathcal{F}f \in \mathfrak{D}$ es epimorfismo entonces $f \in \mathfrak{C}$ es epimorfismo.*

6. *Decimos que el funtor $\mathcal{F} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ **refleja isomorfismos** si para cada flecha $f \in \mathfrak{C}$ es tal que la flecha $\mathcal{F}f \in \mathfrak{D}$ es isomorfismo entonces $f \in \mathfrak{C}$ es isomorfismo.*

Observación 2.2.4. *Sean $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$ dos categorías.*

1. ***Todo funtor preserva isomorfismos*** .

   En efecto:

   Por hipótesis $f : A \to B$ *es un isomorfismo en* $\mathfrak{C}$ *luego existe una flecha* $g : B \to A$ *en* $\mathfrak{C}$ *tal que* $f \circ g = 1_B$ *y* $g \circ f = 1_A$.

   Como $g : B \to A$ *está en* $\mathfrak{C}$ *y* $\mathcal{F} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ *es un funtor entonces* $\mathcal{F}g : \mathcal{F}B \to \mathcal{F}A$ *está en* $\mathfrak{D}$ *luego tenemos que* $\mathcal{F}f \circ \mathcal{F}g = \mathcal{F}(f \circ g) = \mathcal{F}1_B = 1_{\mathcal{F}B}$ *y* $\mathcal{F}g \circ \mathcal{F}f = \mathcal{F}(g \circ f) = \mathcal{F}1_A = 1_{\mathcal{F}A}$ *entonces existe un* $\mathcal{F}g : \mathcal{F}B \to \mathcal{F}A$ *en* $\mathfrak{D}$ *tal que* $\mathcal{F}f \circ \mathcal{F}g = 1_{\mathcal{F}B}$ *y* $\mathcal{F}g \circ \mathcal{F}f = 1_{\mathcal{F}A}$. *Por lo tanto* $\mathcal{F}f : \mathcal{F}A \to \mathcal{F}B$ *es un isomorfismo en* $\mathfrak{D}$.

2. ***Los funtores no reflejan isomorfismos***

   Dado el funtor de olvido $\mathcal{F}$: ***Top*** $\to$ ***Set*** . *Consideremos las topologías discreta* $(\mathbb{R}, \tau_D)$ *y usual* $(\mathbb{R}, \tau_U)$ *en* ***Top*** *con la flecha*

$$\begin{aligned} f : (\mathbb{R}, \tau_D) &\to (\mathbb{R}, \tau_U) \\ k &\mapsto k \end{aligned}$$

   tal que $\mathcal{F}f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es la flecha identidad en* ***Set***.

   Sabemos que $\mathcal{F}f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es un isomorfismo pues es la identidad pero* $f : (\mathbb{R}, \tau_D) \to (\mathbb{R}, \tau_U)$ *no es un isomorfismo pues no es un homeomorfismo ya que la aplicación inversa de f no es continua. Por lo tanto los funtores no reflejan isomorfismos.*

3. ***Los funtores no preservan monomorfismos***

   Consideremos la categoría ***2*** *que tiene solamente dos objetos digamos* A, B *y tres flechas o morfismos digamos* 1_A, 1_B *y* $\tau : A \to B$. *Es facil* *ver que τ es un monomorfismo.*

Definimos $\mathcal{F} : \mathbf{2} \to \mathbf{Mod} - \mathbb{Z}$ de la siguiente manera:

En objetos: $\mathcal{F}A = \mathbb{Z}$ y $\mathcal{F}B = \mathbb{Z}$.

En flechas: $\mathcal{F}1_A = 1_{\mathbb{Z}}$, $\mathcal{F}1_B = 1_{\mathbb{Z}}$ y

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\tau : \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z} \\ x &\mapsto 0 \end{aligned}$$

Así definido $\mathcal{F}$ es un funtor.

Por otro lado la flecha $\mathcal{F}\tau$ en $\mathbf{Mod}$-R no es monomorfismo ya que no es inyectiva.

4. ***Los funtores no reflejan monomorfismos***

Consideremos la categoría $\mathbf{1}$ que tiene un solo objeto digamos A y una sola flecha 1_A que obviamente es la identidad. Sabemos que por ser 1_A la flecha identidad es un monomorfismo.

Ahora consideremos el funtor $\mathbb{Z}$-$\mathbf{Mod} \underset{\mathcal{F}}{\to} \mathbf{1}$ tal que para cada X en $\mathbb{Z}$-$\mathbf{Mod}$ se tiene que $\mathcal{F}X := A$ y para cada flecha $f : X \to Y$ en $\mathbb{Z}$-$\mathbf{Mod}$ se tiene que $\mathcal{F}f := 1_A$. En particular tomemos una flecha

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z} \\ x &\mapsto 0 \end{aligned}$$

en $\mathbb{Z}$-$\mathbf{Mod}$ que claramente no es un monomorfismo pues no es inyectiva pero la flecha $\mathcal{F}f := 1_A : A \to A$ en la categoría $\mathbf{1}$ es un monomorfismo.

5. ***Los funtores no preservan epimorfismos***

*Consideremos el funtor de olvido $\mathcal{F}$: **Haus** $\to$ **Set**, sabemos que $\mathbb{R}$ con la topología usual es un espacio topológico de Hausdorff y como $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ es un subespacio topológico de $\mathbb{R}$ entonces $\mathbb{Q}$ con la topología usual es un espacio topológico de Hausdorff. Ahora podemos considerar la inclusión $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ que es una flecha en **Haus** y dado que $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$ se tiene que f es un epimorfismo pero la flecha $\mathcal{F}f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ en **Set** no lo es pues no es sobreyectiva.*

6. ***Los funtores no reflejan epimorfismos***

   *Consideremos la categoría **1** que tiene un solo objeto digamos A y una sola flecha 1_A que obviamente es la identidad. Sabemos que por ser 1_A la flecha identidad es un epimorfismo.*

   *Ahora consideremos el funtor $\mathbb{Z}$-**Mod** $\underset{\mathcal{F}}{\to}$ **1** tal que para cada X en $\mathbb{Z}$-**Mod** se tiene que $\mathcal{F}X := A$ y para cada flecha $f : X \to Y$ en $\mathbb{Z}$-**Mod** se tiene que $\mathcal{F}f := 1_A$. En particular tomemos una flecha*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z} \\ x &\mapsto 0 \end{aligned}$$

   *en $\mathbb{Z}$-**Mod** que claramente no es un epimorfismo pues no es sobreyectiva pero la flecha $\mathcal{F}f := 1_A : A \to A$ en la categoría **1** es un epimorfismo.*

2.3 Tipos de funtores

Definición 2.3.1. *Sean $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$ dos categorías y sea $\mathcal{F} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ un funtor. Decimos que $\mathcal{F}$ es:*

1. ***Fiel*** *si para cualesquiera* $A, B \in \mathfrak{C}$ *la aplicación*

$$\begin{array}{rcl} F_{\mathcal{F}} : Mor(A,B) & \longrightarrow & Mor(\mathcal{F}A, \mathcal{F}B) \\ f & \mapsto & F_{\mathcal{F}}(f) := \mathcal{F}f \end{array}$$

es inyectiva.

2. ***Pleno*** *si para cualesquiera* $A, B \in \mathfrak{C}$ *la aplicación*

$$\begin{array}{rcl} F_{\mathcal{F}} : Mor(A,B) & \longrightarrow & Mor(\mathcal{F}A, \mathcal{F}B) \\ f & \mapsto & F_{\mathcal{F}}(f) := \mathcal{F}f \end{array}$$

es sobreyectiva.

3. ***Plenamente fiel*** *si es fiel y pleno .*

4. ***Denso o esencialmente sobreyectivo*** *si para cada* $B \in \mathfrak{D}$ *existe un* $A \in \mathfrak{C}$ *tal que* $\mathcal{F}A \cong B$*.*

De forma similar escribiremos las definiciones anteriores para funtores contravariantes como sigue:

Definición 2.3.2. *Sean* $\mathfrak{C}$ *y* $\mathfrak{D}$ *dos categorías y sea* $\mathcal{F} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ *un funtor contravariante. Decimos que* $\mathcal{F}$ *es:*

1. ***Fiel*** *si para cualesquiera* $A, B \in \mathfrak{C}$ *la aplicación*

$$\begin{array}{rcl} F_{\mathcal{F}} : Mor(A,B) & \longrightarrow & Mor(\mathcal{F}B, \mathcal{F}A) \\ f & \mapsto & F_{\mathcal{F}}(f) := \mathcal{F}f \end{array}$$

es inyectiva.

2. ***Pleno*** *si para cualesquiera* $A, B \in \mathfrak{C}$ *la aplicación*

$$\begin{array}{rcl} F_{\mathcal{F}} : Mor(A,B) & \longrightarrow & Mor(\mathcal{F}B, \mathcal{F}A) \\ f & \mapsto & F_{\mathcal{F}}(f) := \mathcal{F}f \end{array}$$

   es sobreyectiva.

3. ***Plenamente fiel*** *si es fiel y pleno .*

4. ***Denso o esencialmente sobreyectivo*** *si para cada* $B \in \mathfrak{D}$ *existe un* $A \in \mathfrak{C}$ *tal que* $\mathcal{F}A \cong B$.

Es facil ver que si $\mathcal{F} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ es un funtor contravariante plenamente fiel entonces el funtor $\mathfrak{C}^{op} \to \mathfrak{D}$ es plenamente fiel.

Ejemplo 2.3.3.

1. *El funtor inclusión siempre es fiel.*

2. *Sea* $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{D}$ *una subcategoría de una categoría* $\mathfrak{D}$.

   El funtor inclusión : $\boldsymbol{i} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ *es pleno sí y solo si* $\mathfrak{C}$ *es una subcategoría plena.*

3. *El funtor identidad es plenamente fiel.*

4. *Sean* $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ *y* $\mathfrak{D}$ *categorías y* $\mathcal{F} : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$, $\mathcal{G} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ *funtores.*

   El funtor producto $\mathcal{F} \times \mathcal{G} : \mathfrak{A} \times \mathfrak{C} \to \mathfrak{B} \times \mathfrak{D}$ *es fiel respectivamente pleno si* $\mathcal{F}$ *y* $\mathcal{G}$ *son fieles respectivamente plenos.*

5. *El funtor constante no es pleno ni fiel.*

Proposición 2.3.4. *Sean $\mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ y $\mathfrak{E}$ categorías donde $\mathcal{F} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$, $\mathcal{G} : \mathfrak{D} \to \mathfrak{E}$ funtores.*

1. *Si $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son fieles entonces $\mathcal{G} \circ \mathcal{F}$ es fiel.*
2. *Si $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son plenos entonces $\mathcal{G} \circ \mathcal{F}$ es pleno.*
3. *Si $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son densos entonces $\mathcal{G} \circ \mathcal{F}$ es denso.*

Demostración:

1. ***Afirmación 1***:

$$\begin{array}{rcl} (G \circ F)_{\mathcal{G} \circ \mathcal{F}} : Mor(A, B) & \longrightarrow & Mor((\mathcal{G} \circ \mathcal{F})A, (\mathcal{G} \circ \mathcal{F})B) \\ h & \mapsto & (G \circ F)_{\mathcal{G} \circ \mathcal{F}}(h) := (\mathcal{G} \circ \mathcal{F})h \end{array}$$

es inyectiva para cualesquiera $A, B \in \mathfrak{C}$.

En efecto:

Dados $A, B \in \mathfrak{C}$ y $f, g \in Mor(A, B)$ tales que $(\mathcal{G} \circ \mathcal{F})f = (\mathcal{G} \circ \mathcal{F})g$.

Como $A, B \in \mathfrak{C}$ y $\mathcal{F} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ es un funtor entonces $\mathcal{F}A, \mathcal{F}B \in \mathfrak{D}$ luego, por ser $\mathcal{G} : \mathfrak{D} \to \mathfrak{E}$ fiel la aplicación

$$\begin{array}{rcl} G_{\mathcal{G}} : Mor(\mathcal{F}A, \mathcal{F}B) & \longrightarrow & Mor(\mathcal{G}(\mathcal{F}A), \mathcal{G}(\mathcal{F}B)) \\ \tau & \mapsto & G_{\mathcal{G}}(\tau) := \mathcal{G}\tau \end{array}$$

es inyectiva.

Dado que $(\mathcal{G} \circ \mathcal{F})f = (\mathcal{G} \circ \mathcal{F})g$ tenemos $\mathcal{G}(\mathcal{F}f) = \mathcal{G}(\mathcal{F}g)$ por la definición de funtor composición, luego por la definición de $G_{\mathcal{G}}$ se tiene que $G_{\mathcal{G}}(\mathcal{F}f) = G_{\mathcal{G}}(\mathcal{F}g)$. De la última igualdad tenemos que $\mathcal{F}f = \mathcal{F}g$ ya que $G_{\mathcal{G}}$ es inyectiva y $\mathcal{F}f, \mathcal{F}g \in Mor(\mathcal{F}A, \mathcal{F}B)$.

Por otro lado ya que $A, B \in \mathfrak{C}$ *y* $\mathcal{F} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ *es un funtor fiel entonces la aplicación*

$$\begin{aligned} F_{\mathcal{F}} : Mor(A, B) &\longrightarrow Mor(\mathcal{F}A, \mathcal{F}B) \\ \psi &\mapsto F_{\mathcal{F}}(\psi) := \mathcal{F}\psi \end{aligned}$$

es inyectiva.

Dado que $\mathcal{F}f = \mathcal{F}g$ *y* $f, g \in Mor(A, B)$ *tenemos* $F_{\mathcal{F}}(f) = F_{\mathcal{F}}(g)$ *luego* $f = g$ *ya que* $F_{\mathcal{F}}$ *es inyectiva.*

Por lo tanto $(G \circ F)_{\mathcal{G} \circ \mathcal{F}}$ *es inyectiva.*

2. ***Afirmación 2:***

$$\begin{aligned} (G \circ F)_{\mathcal{G} \circ \mathcal{F}} : Mor(A, B) &\longrightarrow Mor((\mathcal{G} \circ \mathcal{F})A, (\mathcal{G} \circ \mathcal{F})B) \\ h &\mapsto (G \circ F)_{\mathcal{G} \circ \mathcal{F}}(h) := (\mathcal{G} \circ \mathcal{F})h \end{aligned}$$

es sobreyectiva para cualesquiera $A, B \in \mathfrak{C}$.

En efecto:

Dados $A, B \in \mathfrak{C}$ *y* $\tau \in Mor((\mathcal{G} \circ \mathcal{F})A, (\mathcal{G} \circ \mathcal{F})B)$.

Ya que $A, B \in \mathfrak{C}$ *tenemos que* $\mathcal{F}A, \mathcal{F}B \in \mathfrak{D}$ *pues* $\mathcal{F} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ *es funtor y dado que* $\mathcal{G} : \mathfrak{D} \to \mathfrak{E}$ *es pleno entonces la aplicación*

$$\begin{aligned} G_{\mathcal{G}} : Mor(\mathcal{F}A, \mathcal{F}B) &\longrightarrow Mor(\mathcal{G}(\mathcal{F}A), \mathcal{G}(\mathcal{F}B)) \\ \psi &\mapsto G_{\mathcal{G}}(\psi) := \mathcal{G}\psi \end{aligned}$$

es sobreyectiva.

Dado $\tau \in Mor((\mathcal{G} \circ \mathcal{F})A, (\mathcal{G} \circ \mathcal{F})B) = Mor(\mathcal{G}(\mathcal{F}A), \mathcal{G}(\mathcal{F}B))$, *como* $G_{\mathcal{G}}$ *es sobreyectiva entonces existe* $g \in Mor(\mathcal{F}A, \mathcal{F}B)$ *tal que* $G_{\mathcal{G}}(g) = \mathcal{G}g = \tau$.

Sabemos que $A, B \in \mathfrak{C}$ y $\mathcal{F} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ es pleno, luego la aplicación

$$\begin{array}{rcl} F_{\mathcal{F}} : Mor(A, B) & \longrightarrow & Mor(\mathcal{F}A, \mathcal{F}B) \\ \phi & \mapsto & F_{\mathcal{F}}(\phi) := \mathcal{F}\phi \end{array}$$

es sobreyectiva.

Ya que $g \in Mor(\mathcal{F}A, \mathcal{F}B)$ entonces existe $f \in Mor(A, B)$ tal que $F_{\mathcal{F}}(f) = \mathcal{F}f = g$ pues $F_{\mathcal{F}}$ es sobreyectiva. Por otro lado tenemos que $\tau = G_{\mathcal{G}}(g) = G_{\mathcal{G}}(\mathcal{F}f) = \mathcal{G}(\mathcal{F}f) = (\mathcal{G} \circ \mathcal{F})f = (G \circ F)_{\mathcal{G}\circ\mathcal{F}}(f)$.

Por lo tanto $(G \circ F)_{\mathcal{G}\circ\mathcal{F}}$ es sobreyectiva.

3. ***Afirmación 3**: Dado $B \in \mathfrak{E}$, por demostrar que existe $A \in \mathfrak{C}$ tal que $(\mathcal{G} \circ \mathcal{F})A \approx B$.*

   En efecto:

   Ya que $B \in \mathfrak{E}$ y $\mathcal{G} : \mathfrak{D} \to \mathfrak{E}$ es un funtor denso entonces existe $C \in \mathfrak{D}$ tal que $\mathcal{G}C \approx B$. Dado que $C \in \mathfrak{D}$ y $\mathcal{F} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ es funtor denso entonces existe $A \in \mathfrak{C}$ tal que $\mathcal{F}A \approx C$.

   Como $\mathcal{F}A \approx C$ en $\mathfrak{D}$ y $\mathcal{G} : \mathfrak{D} \to \mathfrak{E}$ es funtor entonces $(\mathcal{G} \circ \mathcal{F})A = \mathcal{G}(\mathcal{F}A) \approx \mathcal{G}C$ pues los funtores llevan isomorfismos en isomorfismos, luego $(\mathcal{G} \circ \mathcal{F})A \approx B$ pues $\mathcal{G}C \approx B$.

$\blacksquare$

Proposición 2.3.5. *Sean $\mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ y $\mathfrak{E}$ categorías y $\mathcal{F} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$, $\mathcal{G} : \mathfrak{D} \to \mathfrak{E}$ funtores.*

1. *Si $\mathcal{G} \circ \mathcal{F}$ es fiel entonces $\mathcal{F}$ es fiel.*

2. *Si $\mathcal{G}\circ\mathcal{F}$ es pleno y $\mathcal{G}$ es fiel entonces $\mathcal{F}$ es pleno.*

3. *Si $\mathcal{G}\circ\mathcal{F}$ es es denso entonces $\mathcal{G}$ es denso.*

Demostración:

1. ***Afirmación 1**: Aa aplicación*

$$\begin{array}{rcl} F_{\mathcal{F}}: Mor(A,B) & \longrightarrow & Mor(\mathcal{F}A,\mathcal{F}B) \\ \psi & \mapsto & F_{\mathcal{F}}(\psi) := \mathcal{F}\psi \end{array}$$

   es inyectiva para cualesquiera $A,B\in\mathfrak{C}$.

   En efecto:

   Dados $A,B\in\mathfrak{C}$ y $f,g\in Mor(A,B)$ tales que $\mathcal{F}f=\mathcal{F}g$.

   Dado que $\mathcal{G}:\mathfrak{D}\to\mathfrak{E}$ es un funtor y $\mathcal{F}f,\mathcal{F}g\in\mathfrak{D}$ entonces

   $\mathcal{G}(\mathcal{F}f)=\mathcal{G}(\mathcal{F}g)$, luego por la definición de funtor composición se tiene que $(\mathcal{G}\circ\mathcal{F})f=\mathcal{G}(\mathcal{F}f)=\mathcal{G}(\mathcal{F}g)=(\mathcal{G}\circ\mathcal{F})g$ entonces $(\mathcal{G}\circ\mathcal{F})f=(\mathcal{G}\circ\mathcal{F})g$. Ya que $A,B\in\mathfrak{C}$ y el funtor $\mathcal{G}\circ\mathcal{F}$ es fiel entonces la aplicación

$$\begin{array}{rcl} (G\circ F)_{\mathcal{G}\circ\mathcal{F}}: Mor(A,B) & \longrightarrow & Mor((\mathcal{G}\circ\mathcal{F})A,(\mathcal{G}\circ\mathcal{F})B) \\ h & \mapsto & (G\circ F)_{\mathcal{G}\circ\mathcal{F}}(h) := (\mathcal{G}\circ\mathcal{F})h \end{array}$$

   es inyectiva, luego tenemos que $f=g$ pues $(G\circ F)_{\mathcal{G}\circ\mathcal{F}}(f)=(\mathcal{G}\circ\mathcal{F})f=(\mathcal{G}\circ\mathcal{F})g=(G\circ F)_{\mathcal{G}\circ\mathcal{F}}(g)$. Luego $F_{\mathcal{F}}$ es inyectiva.

   Por lo tanto $\mathcal{F}$ es un funtor fiel.

2. ***Afirmación 2**: La aplicación*

$$\begin{aligned} F_{\mathcal{F}} : Mor_{\mathfrak{C}}(A,B) &\longrightarrow Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}A, \mathcal{F}B) \\ \psi &\mapsto F_{\mathcal{F}}(\psi) := \mathcal{F}\psi \end{aligned}$$

es sobreyectiva para cualesquiera $A, B \in \mathfrak{C}$.

En efecto:

Dados $A, B \in \mathfrak{C}$ *y* $\tau \in Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}A, \mathcal{F}B)$.

Como $\mathcal{G} : \mathfrak{D} \to \mathfrak{E}$ *es un funtor y* $\tau \in Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}A, \mathcal{F}B)$ *entonces* $\mathcal{G}\tau \in Mor_{\mathfrak{E}}(\mathcal{G}(\mathcal{F}A), \mathcal{G}(\mathcal{F}B)) = Mor_{\mathfrak{E}}((\mathcal{G} \circ \mathcal{F})A, (\mathcal{G} \circ \mathcal{F})B)$ *luego existe* $f \in Mor_{\mathfrak{C}}(A,B)$ *tal que* $(G \circ F)_{\mathcal{G}\circ\mathcal{F}}(f) = (\mathcal{G} \circ \mathcal{F})f = \mathcal{G}(\mathcal{F}f) = \mathcal{G}\tau$ *pues la aplicación*

$$\begin{aligned} (G \circ F)_{\mathcal{G}\circ\mathcal{F}} : Mor_{\mathfrak{C}}(A,B) &\longrightarrow Mor_{\mathfrak{E}}((\mathcal{G} \circ \mathcal{F})A, (\mathcal{G} \circ \mathcal{F})B) \\ h &\mapsto (G \circ F)_{\mathcal{G}\circ\mathcal{F}}(h) := (\mathcal{G} \circ \mathcal{F})h \end{aligned}$$

es sobreyectiva ya que el funtor $\mathcal{G} \circ \mathcal{F}$ *es pleno.*

Por otro lado ya que $A, B \in \mathfrak{C}$, *la aplicación*

$$\begin{aligned} G_{\mathcal{G}} : Mor(\mathcal{F}A, \mathcal{F}B) &\longrightarrow Mor(\mathcal{G}(\mathcal{F}A), \mathcal{G}(\mathcal{F}B)) \\ \psi &\mapsto G_{\mathcal{G}}(\psi) := \mathcal{G}\psi \end{aligned}$$

es inyectiva, luego $F_{\mathcal{F}}(f) = \mathcal{F}f = \tau$ *pues* $G_{\mathcal{G}}(\mathcal{F}f) = G_{\mathcal{G}}(\tau)$ *ya que* $\mathcal{G}(\mathcal{F}f) = \mathcal{G}\tau$. $F_{\mathcal{F}}$ *es sobreyectiva.*

Por lo tanto $\mathcal{F}$ *es un funtor pleno.*

3. ***Afirmación 3***: *Dado* $B \in \mathfrak{E}$, *existe un* $A \in \mathfrak{D}$ *tal que* $\mathcal{G}A \approx B$.

En efecto:

Ya que $B \in \mathfrak{C}$ *y* $\mathcal{G} \circ \mathcal{F} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}$ *es un funtor denso entonces existe* $C \in \mathfrak{C}$ *tal que* $(\mathcal{G} \circ \mathcal{F})C \approx B$ *entonces tenemos que* $\mathcal{G}(\mathcal{F}C) \approx B$ *pues* $(\mathcal{G} \circ \mathcal{F})C = \mathcal{G}(\mathcal{F}C)$.

Luego existe $\mathcal{F}C = A \in \mathfrak{D}$ *tal que* $\mathcal{G}(\mathcal{F}C) = \mathcal{G}A \approx B$.

Por lo tanto $\mathcal{G}$ *es un funtor denso.*

$\blacksquare$

Observación 2.3.6.

Sean $A, B \in \mathfrak{C}$ *y* $\mathcal{F} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ *funtor con* $\mathfrak{C}$ *y* $\mathfrak{D}$ *categorías.*

1. *Si* $\mathcal{F}$ *es un funtor plenamente fiel entonces refleja isomorfismos.*

2. *Si* $\mathcal{F}$ *es un funtor fiel entonces refleja monomorfismos.*

3. *Si* $\mathcal{F}$ *es un funtor fiel entonces refleja epimorfismos.*

2.4 Isomorfismos de categorías

Definición 2.4.1. *Sean* $\mathfrak{C}$ *y* $\mathfrak{D}$ *categorías.*

Decimos que un funtor $\mathcal{F} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ *es isomorfismo si existe un funtor* $\mathcal{G} : \mathfrak{D} \to \mathfrak{C}$ *tal que* $\mathcal{G} \circ \mathcal{F} = 1_{\mathfrak{C}}$ *y* $\mathcal{F} \circ \mathcal{G} = 1_{\mathfrak{D}}$.

En este caso decimos que $\mathfrak{C}$ *es isomorfo a* $\mathfrak{D}$ *y lo denotamos por* $\mathfrak{C} \cong \mathfrak{D}$.

Ejemplo 2.4.2.

1. *El funtor* $\mathcal{F} : \mathbb{Z} - \boldsymbol{Mod} \to \boldsymbol{Ab}$ *es un isomorfismo.*

2. *Si R es un anillo conmutativo entonces el funtor*

   $\mathcal{G} : R - \boldsymbol{Mod} \to \boldsymbol{Mod} - R$ *es un isomorfismo.*

3. *Sea $\mathfrak{C}$ una categoría.*

   El funtor $\mathcal{H} : (\mathfrak{C}^{op})^{op} \to \mathfrak{C}$ es un isomorfismo.

Definición 2.4.3. *Sean $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$ dos categorías y $\mathcal{F} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ un funtor.*

Decimos que el funtor $\mathcal{F}$ es:

1. ***Inyectivo en objetos** si la aplicación*

$$\begin{array}{rcl} F_0 : Ob(\mathfrak{C}) & \longrightarrow & Ob(\mathfrak{D}) \\ C & \mapsto & F_0(C) := \mathcal{F}C \end{array}$$

   es inyectiva.

2. ***Sobreyectivo en objetos** si la aplicación*

$$\begin{array}{rcl} F_0 : Ob(\mathfrak{C}) & \longrightarrow & Ob(\mathfrak{D}) \\ C & \mapsto & F_0(C) := \mathcal{F}C \end{array}$$

   es sobreyectiva.

3. ***Biyectivo en objetos** si la aplicación*

$$\begin{array}{rcl} F_0 : Ob(\mathfrak{C}) & \longrightarrow & Ob(\mathfrak{D}) \\ C & \mapsto & F_0(C) := \mathcal{F}C \end{array}$$

   es biyectiva. Por lo tanto $\mathcal{F}$ es biyectivo en objetos si es inyectivo y sobreyectivo en objetos.

2.5 Caracterizando categorías isomorfas

Ahora veremos una caracterización de cuando dos categorías son isomorfas.

Proposición 2.5.1. *Sean $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$ dos categorías.*

Un funtor $\mathcal{F} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ es un isomorfismo sí y solo si $\mathcal{F}$ es plenamente fiel y biyectivo en objetos.

Demostración:

($\Rightarrow$) Supongamos que el funtor $\mathcal{F} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ es un isomorfismo luego existe un funtor $\mathcal{G} : \mathfrak{D} \to \mathfrak{C}$ tal que $\mathcal{G} \circ \mathcal{F} = 1_{\mathfrak{C}}$ y $\mathcal{F} \circ \mathcal{G} = 1_{\mathfrak{D}}$.

***Afirmación 1**: $\mathcal{F}$ es biyectivo en objetos.*

En efecto:

Primero veamos que

$$\begin{array}{rcl} F_0 : Ob(\mathfrak{C}) & \longrightarrow & Ob(\mathfrak{D}) \\ C & \mapsto & F_0(C) := \mathcal{F}C \end{array}$$

es inyectiva

Sean $A, B \in \mathfrak{C}$ tales que $F_0(A) = F_0(B)$. Dado que $F_0(A) = F_0(B)$ entonces $\mathcal{F}A = \mathcal{F}B$, luego $(\mathcal{G} \circ \mathcal{F})A = \mathcal{G}(\mathcal{F}A) = \mathcal{G}(\mathcal{F}B) = (\mathcal{G} \circ \mathcal{F})B$ es decir $(\mathcal{G} \circ \mathcal{F})A = (\mathcal{G} \circ \mathcal{F})B$.

Sabemos que $\mathcal{G} \circ \mathcal{F} = 1_{\mathfrak{C}}$ entonces $1_{\mathfrak{C}}A = (\mathcal{G} \circ \mathcal{F})A = (\mathcal{G} \circ \mathcal{F})B = 1_{\mathfrak{C}}B$ lo que implica que $A = B$. Luego F_0 es inyectiva.

Ahora veamos que

$$\begin{aligned} F_0 : Ob(\mathfrak{C}) &\longrightarrow Ob(\mathfrak{D}) \\ C &\mapsto F_0(C) := \mathcal{F}C \end{aligned}$$

es sobreyectiva.

Tomemos un objeto $B \in Ob(\mathfrak{D})$ *luego es obvio que* $1_{\mathfrak{D}}B = B$.

Sabemos que $\mathcal{F} \circ \mathcal{G} = 1_{\mathfrak{D}}$ *entonces se tiene*

$F_0(\mathcal{G}B) = \mathcal{F}(\mathcal{G}B) = (\mathcal{F} \circ \mathcal{G})B = 1_{\mathfrak{D}}B = B$. *Luego existe un*

$A = \mathcal{G}B \in Ob(\mathfrak{C})$ *tal que* $F_0(A) = B$. *Por lo tanto* F_0 *es sobreyectiva.*

Luego F_0 *es biyectiva. Así* $\mathcal{F}$ *es biyectivo en objetos.*

Afirmación 2: *Para cada par de objetos* $A, B \in \mathfrak{C}$ *la aplicación*

$$\begin{aligned} F_1 : Mor_{\mathfrak{C}}(A, B) &\longrightarrow Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}A, \mathcal{F}B) \\ \psi &\mapsto F_1(\psi) := \mathcal{F}\psi \end{aligned}$$

es biyectiva.

En efecto:

Primero veamos que F_1 *es inyectiva.*

Sean $f, g \in Mor_{\mathfrak{C}}(A, B)$ *tales que* $F_1(f) = F_1(g)$.

Ya que $F_1(f) = F_1(g)$ *entonces* $\mathcal{F}f = \mathcal{F}g$ *luego*

$(\mathcal{G} \circ \mathcal{F})f = \mathcal{G}(\mathcal{F}f) = \mathcal{G}(\mathcal{F}g) = (\mathcal{G} \circ \mathcal{F})g$

y esto último implica que $(\mathcal{G} \circ \mathcal{F})f = (\mathcal{G} \circ \mathcal{F})g$.

Sabemos que $\mathcal{G} \circ \mathcal{F} = 1_{\mathfrak{C}}$ *entonces* $1_{\mathfrak{C}}f = (\mathcal{G} \circ \mathcal{F})f = (\mathcal{G} \circ \mathcal{F})g = 1_{\mathfrak{C}}g$

lo que implica que $f = g$. *Luego* F_1 *es inyectiva.*

Ahora veamos que F_1 *es sobreyectiva.*

Tomemos una flecha $h \in Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}A, \mathcal{F}B)$ *luego es obvio que* $1_{\mathfrak{D}}h = h$.

Sabemos que $\mathcal{F} \circ \mathcal{G} = 1_{\mathfrak{D}}$ *entonces se tiene*

$F_1(\mathcal{G}h) = \mathcal{F}(\mathcal{G}h) = (\mathcal{F} \circ \mathcal{G})h = 1_{\mathfrak{D}}h = h$. *Luego existe un*

$f = \mathcal{G}h \in Mor_{\mathfrak{C}}(A, B)$ tal que $F_1(f) = h$. Luego F_1 es sobreyectiva.

Por lo tanto F_1 es biyectiva.

Esta última afirmación quiere decir que $\mathcal{F}$ es plenamente fiel.

($\Leftarrow$) Vamos a definir un funtor $\mathcal{G} : \mathfrak{D} \to \mathfrak{C}$ de la siguiente manera:

***En objetos**: Para cada $D \in \mathfrak{D}$ existe un único objeto $C_D \in \mathfrak{C}$ tal que*

$F_0(C_D) = \mathcal{F}C_D = D$

pues la aplicación F_0 es biyectiva, luego definimos $\mathcal{G}D := C_D$.

***En flechas**: Sea $h : D_1 \to D_2$ una flecha en $\mathfrak{D}$. Ya que $D_1, D_2 \in \mathfrak{D}$ entonces existen únicos $C_{D_1}, C_{D_2} \in \mathfrak{C}$ tales que $\mathcal{F}C_{D_1} = D_1$ y $\mathcal{F}C_{D_2} = D_2$ pues F_0 es biyectiva y por la definición de los objetos de $\mathcal{G}$ tenemos que $\mathcal{G}D_1 := C_{D_1}$ y $\mathcal{G}D_2 := C_{D_2}$.*

Por otro lado ya que $C_{D_1}, C_{D_2} \in \mathfrak{C}$ entonces la aplicación

$$\begin{aligned} F_{\mathcal{F}} : Mor_{\mathfrak{C}}(C_{D_1}, C_{D_2}) &\longrightarrow Mor_{\mathfrak{D}}(D_1, D_2) \\ g &\mapsto F_{\mathcal{F}}(g) := \mathcal{F}g \end{aligned}$$

es biyectiva pues $\mathcal{F}$ es plenamente fiel y como $h \in Mor_{\mathfrak{D}}(D_1, D_2)$ entonces existe una única flecha $f_h \in Mor_{\mathfrak{C}}(C_{D_1}, C_{D_2})$ tal que $\mathcal{F}f_h = h$.

Luego definimos $\mathcal{G}h := f_h$.

Es facil ver que $\mathcal{F} \circ \mathcal{G} = 1_{\mathfrak{D}}$ y $\mathcal{G} \circ \mathcal{F} = 1_{\mathfrak{C}}$

$\blacksquare$

Chapter 3

Transformaciones naturales

En el capítulo anterior vimos cuando dos categorías son isomorfas.

En este capítulo veremos cuando dos funtores son naturalmente isomorfos y cuando dos categorías son equivalentes.

3.1 Transformación natural

Definición 3.1.1. *Sean $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$ dos categorías y sean $\mathcal{F}, \mathcal{G} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ dos funtores.*

*Una **transformación natural** $\tau : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ asocia a cada objeto $A \in \mathfrak{C}$ una flecha $\tau_A : \mathcal{F}A \to \mathcal{G}A$ en $\mathfrak{D}$ tal que para cada flecha $f : A \to B$ en $\mathfrak{C}$ el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}A \arrow[r, "\tau_A"] \arrow[d, "\mathcal{F}f"'] & \mathcal{G}A \arrow[d, "\mathcal{G}f"] \\
\mathcal{F}B \arrow[r, "\tau_B"'] & \mathcal{G}B
\end{tikzcd}$$

conmuta en $\mathfrak{D}$.

Definición 3.1.2. *Sean $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$ dos categorías y sean $\mathcal{F}, \mathcal{G} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ dos funtores contravariantes.*

Una ***transformación natural*** *$\tau : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ asocia a cada objeto $A \in \mathfrak{C}$ una flecha $\tau_A : \mathcal{F}A \to \mathcal{G}A$ en $\mathfrak{D}$ tal que para cada flecha $f : A \to B$ en $\mathfrak{C}$ el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}A \arrow[r, "\tau_A"] & \mathcal{G}A \\ \mathcal{F}B \arrow[u, "\mathcal{F}f"] \arrow[r, "\tau_B"'] & \mathcal{G}B \arrow[u, "\mathcal{G}f"'] \end{tikzcd}$$

conmuta en $\mathfrak{D}$.

Ejemplos 3.1.3.

1. *Sean $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$ dos categorías y sea $\mathcal{F} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ un funtor. Definimos $\tau : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ tal que asigna a cada $A \in \mathfrak{C}$ la flecha identidad*

   $\tau_A = 1_{\mathcal{F}A} : \mathcal{F}A \to \mathcal{F}A$ en $\mathfrak{D}$. Así definido τ es una transformación natural.

2. *Sean $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$ dos categorías y sean $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{J} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ tres funtores.*

   Si $\tau : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ y $\eta : \mathcal{G} \to \mathcal{J}$ son transformaciones naturales entonces $\eta \circ \tau : \mathcal{F} \to \mathcal{H}$ es una transformación natural si tiene la siguiente propiedad: Para cada $A \in \mathfrak{C}$ tenemos que $(\eta \circ \tau)_A = \eta_A \circ \tau_A$

3. *Sean $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ y $\mathfrak{E}$ tres categorías y sean $\mathcal{F}, \mathcal{G} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ y $\mathcal{J} : \mathfrak{D} \to \mathfrak{E}$ tres funtores.*

   Si $\tau : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ es una transformación natural entonces

$\mathcal{J}\tau : \mathcal{J} \circ \mathcal{F} \to \mathcal{J} \circ \mathcal{G}$ definida por $(\mathcal{J}\tau)_A : (\mathcal{J} \circ \mathcal{F})_A \to (\mathcal{J} \circ \mathcal{G})_A$ para cada $A \in \mathfrak{C}$ es una transformación natural.

3.2 Isomorfismo natural de funtores

Definición 3.2.1. *Sean $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$ dos categorías y sean $\mathcal{F}, \mathcal{G} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ dos funtores.*

*Una transformación natural $\tau : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ es un **isomorfismo natural de funtores** o simplemente un isomorfismo de funtores si para cada $A \in \mathfrak{C}$ se tiene que $\tau_A : \mathcal{F}A \to \mathcal{G}A$ es un isomorfismo en $\mathfrak{D}$.*

En este caso tenemos una transformación natural $\tau^{-1} : \mathcal{G} \to \mathcal{F}$ definida por $(\tau^{-1})_A := (\tau_A)^{-1}$ para cada $A \in \mathfrak{C}$. Denotaremos $\mathcal{F} \cong \mathcal{G}$ para decir que $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son naturalmente isomorfos.

Ejemplos 3.2.2.

1. *Definimos el funtor de olvido $\mathcal{F}$: **Grp** $\to$ **Set** de la siguiente manera:*

   En objetos**: Para cada $A \in$ **Grp** definimos $\mathcal{F}A := A$ en **Set

   ***En flechas**: Sea $f : A \to B$ una flecha en **Grp** entonces definimos la flecha*

$$\begin{aligned} \mathcal{F}f : \mathcal{F}A &\longrightarrow \mathcal{F}B \\ a &\mapsto f(a) \end{aligned}$$

   *en **Set**.*

   *Y ahora definimos el siguiente funtor $\mathcal{H}^{\mathbb{Z}}$: **Grp** $\to$ **Set** de la siguiente manera:*

En objetos: *Para cada* $U \in \boldsymbol{Grp}$ *tenemos que* $\mathcal{H}^{\mathbb{Z}}U := Mor_{\boldsymbol{Grp}}(\mathbb{Z}, U)$

En flechas: *Para cada flecha* $f : U \to V$ *en* $\boldsymbol{Grp}$ *tenemos que*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{H}^{\mathbb{Z}}f : \mathcal{H}^{\mathbb{Z}}U := Mor_{\boldsymbol{Grp}}(\mathbb{Z}, U) & \longrightarrow & \mathcal{H}^{\mathbb{Z}}V := Mor_{\boldsymbol{Grp}}(\mathbb{Z}, V) \\ g & \mapsto & \mathcal{H}^{\mathbb{Z}}f(g) := f \circ g \end{array}$$

es una flecha en $\boldsymbol{Set}$.

Entonces $\mathcal{F} \cong \mathcal{H}^{\mathbb{Z}}$

2. *Definimos el funtor contravariante* $\mathcal{F} : \boldsymbol{Set} \to \boldsymbol{Set}$ *de la siguiente manera:*

   En objetos: *Para cada* $A \in \boldsymbol{Set}$ *definimos* $\mathcal{F}A := \mathcal{P}(A)$ *donde* $\mathcal{P}(A)$ *es el conjunto potencia de* A.

   En flechas: *Para cada flecha* $f : A \to B$ *en* $\boldsymbol{Set}$ *definimos la flecha*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{F}f : \mathcal{F}B & \longrightarrow & \mathcal{F}A \\ B_1 & \mapsto & f^{-1}(B_1) \end{array}$$

   en $\boldsymbol{Set}$.

   Y ahora definimos el siguiente funtor $\mathcal{H}_{\{0,1\}} : \boldsymbol{Set} \to \boldsymbol{Set}$ *de la siguiente manera:*

   En objetos: *Para cada* $U \in \boldsymbol{Set}$ *tenemos que* $\mathcal{H}_{\{0,1\}}U := Mor_{\boldsymbol{Set}}(U, \{0, 1\})$

   En flechas: *Para cada flecha* $f : U \to V$ *en* $\boldsymbol{Set}$ *tenemos que*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{H}_{\{0,1\}}f : \mathcal{H}_{\{0,1\}}V := Mor_{\boldsymbol{Set}}(V, \{0, 1\}) & \longrightarrow & \mathcal{H}_{\{0,1\}}U := Mor_{\boldsymbol{Set}}(U, \{0, 1\}) \\ g & \mapsto & \mathcal{H}_{\{0,1\}}f(g) := g \circ f \end{array}$$

es una flecha en ***Set****.*

Entonces $\mathcal{F} \cong \mathcal{H}_{\{0,1\}}$

3.3 Equivalencia de categorías

Definición 3.3.1. *Sean* $\mathfrak{C}$ *y* $\mathfrak{D}$ *dos categorías.*

Un funtor $\mathcal{F} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ *es una* ***equivalencia*** *si existe un funtor* $\mathcal{G} : \mathfrak{D} \to \mathfrak{C}$ *tal que* $\mathcal{F} \circ \mathcal{G} \cong 1_{\mathfrak{D}}$ *y* $\mathcal{G} \circ \mathcal{F} \cong 1_{\mathfrak{C}}$*.*

En este caso decimos que $\mathfrak{C}$ *y* $\mathfrak{D}$ *son categorías equivalentes y denotaremos* $\mathfrak{C} \equiv \mathfrak{D}$*.*

Ejemplos 3.3.2.

1. *Consideremos la categoría uno denotada por* $\boldsymbol{1}$ *donde* $Ob(\boldsymbol{1}) = \{A\}$ *y* $Mor(\boldsymbol{1}) = \{1_A\}$ *y la categoría dos con cuatro flechas denotada por* $\boldsymbol{2}^4$ *donde* $Ob(\boldsymbol{2}^4) = \{B, C\}$ *y* $Mor(\boldsymbol{2}^4) = \{1_B, 1_C, f : B \to C, g : C \to B\}$*. Ahora definimos el funtor* $\mathcal{F} : \boldsymbol{1} \to \boldsymbol{2}^4$ *de la siguiente manera:*

   En objetos*: Para el único objeto* $A \in \boldsymbol{1}$ *tenemos que* $\mathcal{F}A := B$*.*

   En flechas*: Para la única flecha* $1_A : A \to A$ *en* $\boldsymbol{1}$ *tenemos que* $\mathcal{F}1_A : B \to B$*. También vamos a definir el funtor* $\mathcal{G} : \boldsymbol{2}^4 \to \boldsymbol{1}$ *de la siguiente manera:*

   En objetos*: Para* $B, C \in \boldsymbol{2}^4$ *tenemos que* $\mathcal{G}B = \mathcal{G}C := A$*.*

   En flechas*: Para las flechas* $1_B, 1_C, f, g$ *en* $\boldsymbol{2}^4$ *tenemos que* $\mathcal{G}1_B = \mathcal{G}1_C = \mathcal{G}f = \mathcal{G}g := 1_A$*.*

   Es fácil ver que $\mathcal{F} : \boldsymbol{1} \to \boldsymbol{2}^4$ *es una equivalencia.*

2. Sean R y S dos anillos.

*La categoría producto R-**Mod** $\times$ S-**Mod** es equivalente a la categoría $(R \times S)$-**Mod**.*

3.4 Caracterizando categorías equivalentes

Ahora veamos una caracterización de la definición anterior.

Proposición 3.4.1. *Sean $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$ dos categorías.*

Un funtor $\mathcal{F} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ es una equivalencia sí y solo si $\mathcal{F}$ es plenamente fiel y denso.

Demostración:

($\Rightarrow$) Por hipótesis $\mathcal{F} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ es una equivalencia luego existe un funtor $\mathcal{G} : \mathfrak{D} \to \mathfrak{C}$ tal que $\mathcal{F} \circ \mathcal{G} \cong 1_{\mathfrak{D}}$ y $\mathcal{G} \circ \mathcal{F} \cong 1_{\mathfrak{C}}$.

***Afirmación 1**: Para cada $A, B \in \mathfrak{C}$, la aplicación*

$$\begin{aligned} F_{\mathcal{F}} : Mor_{\mathfrak{C}}(A, B) &\longrightarrow Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}A, \mathcal{F}B) \\ h &\mapsto F_{\mathcal{F}}(h) := \mathcal{F}h \end{aligned}$$

es inyectiva.

En efecto:

Sean $f, g \in Mor_{\mathfrak{C}}(A, B)$ tales que $F_{\mathcal{F}}(f) = F_{\mathcal{F}}(g)$ entonces $\mathcal{F}f = \mathcal{F}g$. Dado que $\mathcal{G} \circ \mathcal{F} \cong 1_{\mathfrak{C}}$ entonces $\tau : \mathcal{G} \circ \mathcal{F} \to 1_{\mathfrak{C}}$ es una transformación natural que es un isomorfismo y como $f : A \to B$ es una flecha en $\mathfrak{C}$ entonces el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
(\mathcal{G}\circ\mathcal{F})A & \xrightarrow{\tau_A} & 1_{\mathfrak{C}}A \\
{\scriptstyle (\mathcal{G}\circ\mathcal{F})f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 1_{\mathfrak{C}}f=f} \\
(\mathcal{G}\circ\mathcal{F})B & \xrightarrow[\tau_B]{} & 1_{\mathfrak{C}}B
\end{array}$$

conmuta.

Lo mismo ocurre con la flecha $g : A \to B$ pues está en $\mathfrak{C}$ entonces el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
(\mathcal{G}\circ\mathcal{F})A & \xrightarrow{\tau_A} & 1_{\mathfrak{C}}A \\
{\scriptstyle (\mathcal{G}\circ\mathcal{F})g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 1_{\mathfrak{C}}g=g} \\
(\mathcal{G}\circ\mathcal{F})B & \xrightarrow[\tau_B]{} & 1_{\mathfrak{C}}B
\end{array}$$

conmuta.

Por otro lado, ya que $\mathcal{F}f = \mathcal{F}g$ se tiene

$(\mathcal{G}\circ\mathcal{F})f = \mathcal{G}(\mathcal{F}f) = \mathcal{G}(\mathcal{F}g) = (\mathcal{G}\circ\mathcal{F})g$ y por la conmtatividad de los diagramas se tiene que $g \circ \tau_A = \tau_B \circ (\mathcal{G}\circ\mathcal{F})g = \tau_B \circ (\mathcal{G}\circ\mathcal{F})f = f \circ \tau_A$ entonces $g \circ \tau_A = f \circ \tau_A$ luego $f = g$ pues τ_A es un isomorfismo en $\mathfrak{C}$.

Por lo tanto tenemos la inyectividad.

Esta afirmación quiere decir que $\mathcal{F}$ es fiel.

***Afirmción 2** Para cada $A, B \in \mathfrak{C}$, la aplicación*

$$\begin{aligned}
F_{\mathcal{F}} : Mor_{\mathfrak{C}}(A,B) \;&\longrightarrow\; Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}A, \mathcal{F}B) \\
j \;&\mapsto\; F_{\mathcal{F}}(j) := \mathcal{F}j
\end{aligned}$$

es sobreyectiva.

En efecto:

Tomemos una flecha $h \in Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}A, \mathcal{F}B)$.

Definimos la flecha $f \in Mor_{\mathfrak{C}}(A,B)$ de la siguiente manera:

$f = \tau_B \circ \mathcal{G}h \circ \tau_A^{-1} : A \to B$. *Por otro lado el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd} (\mathcal{G}\circ\mathcal{F})A \arrow[r, "\tau_A"] \arrow[d, "(\mathcal{G}\circ\mathcal{F})f"'] & 1_{\mathfrak{C}}A \arrow[d, "1_{\mathfrak{C}}f=f"] \\ (\mathcal{G}\circ\mathcal{F})B \arrow[r, "\tau_B"'] & 1_{\mathfrak{C}}B \end{tikzcd}$$

conmuta pues $f : A \to B$ *está en* $\mathfrak{C}$ *y* $\tau : \mathcal{G}\circ\mathcal{F} \to 1_{\mathfrak{C}}$ *es una transformación natural que es un isomorfismo ya que* $\mathcal{G} \circ \mathcal{F} \cong 1_{\mathfrak{C}}$.

Del diagrama que es conmutativo tenemos que $\tau_B \circ (\mathcal{G} \circ \mathcal{F})f = f \circ \tau_A$ *luego por ser* τ_B *un isomorfismo en* $\mathfrak{D}$ *tenemos que* $(\mathcal{G}\circ\mathcal{F})f = \tau_B^{-1} \circ f \circ \tau_A$ *entonces* $\mathcal{G}(\mathcal{F}f) = (\mathcal{G}\circ\mathcal{F})f = \tau_B^{-1} \circ f \circ \tau_A = \tau_B^{-1} \circ (\tau_B \circ \mathcal{G}h \circ \tau_A^{-1}) \circ \tau_A = \mathcal{G}h$ *luego* $\mathcal{G}(\mathcal{F}f) = \mathcal{G}h$ *entonces* $\mathcal{F}f = h$ *pues el funtor* $\mathcal{G} : D \to C$ *es fiel ya que dados* $A, B \in \mathfrak{D}$, *la aplicación*

$$\begin{array}{rcl} G_{\mathcal{G}} : Mor_{\mathfrak{D}}(A, B) & \longrightarrow & Mor_{\mathfrak{C}}(\mathcal{G}A, \mathcal{G}B) \\ i & \mapsto & G_{\mathcal{G}}(i) := \mathcal{G}i \end{array}$$

es inyectiva. En efecto: Sean $r, s \in Mor_{\mathfrak{D}}(A, B)$ *tales que* $G_{\mathcal{G}}(r) = G_{\mathcal{G}}(s)$ *entonces* $\mathcal{G}r = \mathcal{G}s$. *Por otro lado* $\mathcal{F} \circ \mathcal{G} \cong 1_{\mathfrak{D}}$ *entonces* $\tau : \mathcal{F} \circ \mathcal{G} \to 1_{\mathfrak{D}}$ *es una transformación natural que es un isomorfismo y ya que* $f : A \to B$ *es una flecha en* $\mathfrak{D}$ *entonces el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd} (\mathcal{F}\circ\mathcal{G})A \arrow[r, "\tau_A"] \arrow[d, "(\mathcal{F}\circ\mathcal{G})r"'] & 1_{\mathfrak{D}}A \arrow[d, "1_{\mathfrak{D}}r=r"] \\ (\mathcal{F}\circ\mathcal{G})B \arrow[r, "\tau_B"'] & 1_{\mathfrak{D}}B \end{tikzcd}$$

conmuta.

Lo mismo ocurre con la flecha $s : A \to B$ *ya que está en* $\mathfrak{D}$, *entonces el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{F}\circ\mathcal{G})A \arrow[r, "\tau_A"] \arrow[d, "(\mathcal{F}\circ\mathcal{G})s"'] & 1_{\mathfrak{D}}A \arrow[d, "1_{\mathfrak{D}}s=s"] \\
(\mathcal{F}\circ\mathcal{G})B \arrow[r, "\tau_B"'] & 1_{\mathfrak{D}}B
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Por otro lado ya que $\mathcal{G}r = \mathcal{G}s$ entonces se tiene que

$(\mathcal{F}\circ\mathcal{G})r = \mathcal{F}(\mathcal{G}r) = \mathcal{F}(\mathcal{G}s) = (\mathcal{F}\circ\mathcal{G})s$ *y por la conmtatividad de los diagramas se tiene que* $s\circ\tau_A = \tau_B\circ(\mathcal{F}\circ\mathcal{G})s = \tau_B\circ(\mathcal{F}\circ\mathcal{G})r = r\circ\tau_A$ *entonces* $s\circ\tau_A = r\circ\tau_A$ *luego* $r = s$ *pues* τ_A *es un isomorfismo en* $\mathfrak{D}$*.*

Luego tenemos que $G_{\mathcal{G}}$ es inyectiva, lo que implica que $\mathcal{G}$ es fiel.

Teniamos que $\mathcal{F}f = h$ gracias a que $\mathcal{G}$ es fiel, por lo tanto existe un $f\in Mor_{\mathfrak{C}}(A,B)$ tal que $F_{\mathcal{F}}(f) = \mathcal{F}f = h$ y esto implica que $F_{\mathcal{F}}$ es sobreyectiva.

Esta afirmación quiere decir que $\mathcal{F}$ es pleno.

Afirmación 3: *Para cada $B\in\mathfrak{D}$ existe $A\in\mathfrak{C}$ tal que $\mathcal{F}A\cong B$.*

En efecto:

Tomemos $B\in\mathfrak{D}$ y como $\mathcal{F}\circ\mathcal{G}\cong 1_{\mathfrak{D}}$ entonces

$\tau:\mathcal{F}\circ\mathcal{G}\to 1_{\mathfrak{D}}$ es una transformación natural que es un isomorfismo,

luego $\tau_B:(\mathcal{F}\circ\mathcal{G})B\to 1_{\mathfrak{D}}B$ es un isomorfismo en $\mathfrak{D}$, esto quiere decir que

$\mathcal{F}(\mathcal{G}B) = (\mathcal{F}\circ\mathcal{G})B\cong 1_{\mathfrak{D}}B = B$.

Por lo tanto, existe $A = \mathcal{G}B$ tal que $\mathcal{F}A\cong B$.

Esta afirmación quiere decir que $\mathcal{F}$ es denso.

($\Leftarrow$) Vamos a definir un funtor $\mathcal{G}:\mathfrak{D}\to\mathfrak{C}$ de la siguiente manera:

En objetos: *Para cada $D\in\mathfrak{D}$ existe $C_D\in\mathfrak{C}$ tal que $\mathcal{F}C_D\cong D$*

pues $\mathcal{F}:\mathfrak{C}\to\mathfrak{D}$ *es denso, luego definimos* $\mathcal{G}D := C_D$.

En flechas*: Sea* $h : D_1 \to D_2$ *una flecha en* $\mathfrak{D}$. *Ya que* $D_1, D_2 \in \mathfrak{D}$ *entonces existen* $C_{D_1}, C_{D_2} \in \mathfrak{C}$ *tales que* $\mathcal{F}C_{D_1} \cong D_1$ *y* $\mathcal{F}C_{D_2} \cong D_2$ *pues* $\mathcal{F}$ *es denso, luego tenemos que* $l_{D_2} : D_2 \to \mathcal{F}(\mathcal{G}D_2)$ *y* $l_{D_1} : D_1 \to \mathcal{F}(\mathcal{G}D_1)$ *son isomorfismos en* $\mathfrak{D}$ *y por la definición de objetos en* $\mathcal{G}$ *se tiene que* $\mathcal{G}D_1 := C_{D_1}$ *y* $\mathcal{G}D_2 := C_{D_2}$.

Por otro lado ya que $\mathcal{G}D_1, \mathcal{G}D_2 \in \mathfrak{C}$ *entonces la aplicación*

$$\begin{array}{rcl} F_{\mathcal{F}} : Mor_{\mathfrak{C}}(\mathcal{G}D_1, \mathcal{G}D_2) & \longrightarrow & Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}(\mathcal{G}D_1), \mathcal{F}(\mathcal{G}D_2)) \\ g & \mapsto & F_{\mathcal{F}}(g) := \mathcal{F}g \end{array}$$

es biyectiva pues $\mathcal{F}$ *es plenamente fiel.*

Tenemos que $l_{D_2} \circ h \circ l_{D_1}^{-1} \in Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}(\mathcal{G}D_1), \mathcal{F}(\mathcal{G}D_2))$ *luego existe una única flecha* $f_h : \mathcal{G}D_1 \to \mathcal{G}D_2$ *tal que* $F_{\mathcal{F}}(f_h) = \mathcal{F}f_h = l_{D_2} \circ h \circ l_{D_1}^{-1}$ *y que hace conmutar el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd} D_1 \arrow[r, "l_{D_1}"] \arrow[d, "h"'] & \mathcal{F}(\mathcal{G}D_1) \arrow[d, "\mathcal{F}f_h"] \\ D_2 \arrow[r, "l_{D_2}"'] & \mathcal{F}(\mathcal{G}D_2) \end{tikzcd}$$

Por lo tanto ya podemos definir la flecha $\mathcal{G}h := f_h$ *en* $\mathfrak{C}$.

Así definido $\mathcal{G}$ *es un funtor y* $\tau : 1_{\mathfrak{D}} \to \mathcal{F}\circ\mathcal{G}$ *es un isomorfismo natural pues para cada* $A \in \mathfrak{D}$ *la flecha* $\tau_A : 1_{\mathfrak{D}}A \to (\mathcal{F}\circ\mathcal{G})A$ *es un isomorfismo en* $\mathfrak{D}$ *y para cada flecha* $f : A \to B$ *en* $\mathfrak{D}$ *el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd}
1_{\mathfrak{D}}A \arrow[r, "\tau_A"] \arrow[d, "1_{\mathfrak{D}}f"'] & (\mathcal{F}\circ\mathcal{G})A \arrow[d, "(\mathcal{F}\circ\mathcal{G})f"] \\
1_{\mathfrak{D}}B \arrow[r, "\tau_B"'] & (\mathcal{F}\circ\mathcal{G})B
\end{tikzcd}$$

conmuta. Esto último se da por la construcción del funtor $\mathcal{G}$.

Luego exite un funtor $\mathcal{G} : \mathfrak{D} \to \mathfrak{C}$ tal que $\mathcal{F} \circ \mathcal{G} \cong 1_{\mathfrak{D}}$.

Por último probemos que $\mu : 1_{\mathfrak{C}} \to \mathcal{G} \circ \mathcal{F}$ es un isomorfismo natural.

En efecto:

Dado $C \in \mathfrak{C}$ entonces $\mathcal{F}C \in \mathfrak{D}$ luego por la definición de la transformación natural τ se tiene que la flecha $\tau_{\mathcal{F}C} : 1_{\mathfrak{D}}\mathcal{F}C \to (\mathcal{F}\circ\mathcal{G})\mathcal{F}C$ está en $\mathfrak{D}$ y es un isomorfismo. Por otro lado sabemos que $\mathcal{F}$ es pleno y como $C, (\mathcal{G} \circ \mathcal{F})C \in \mathfrak{C}$ entonces la aplicación

$$\begin{array}{rcl}
F_{\mathcal{F}} : Mor_{\mathfrak{C}}(C, (\mathcal{G}\circ\mathcal{F})C) & \longrightarrow & Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}C, \mathcal{F}(\mathcal{G}\circ\mathcal{F})C) \\
g & \mapsto & F_{\mathcal{F}}(g) := \mathcal{F}g
\end{array}$$

es sobreyectiva. Se nota que $\tau_{\mathcal{F}C} \in Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}C, \mathcal{F}(\mathcal{G}\circ\mathcal{F})C)$ luego existe una flecha $\mu_C : C \to (\mathcal{G}\circ\mathcal{F})C$ en $\mathfrak{C}$ tal que $F_{\mathcal{F}}(\mu_C) = \mathcal{F}\mu_C = \tau_{\mathcal{F}C}$. Como $\tau_{\mathcal{F}C}$ es un isomorfismo entonces $\mathcal{F}\mu_C$ es un isomorfismo luego μ_C es un isomorfismo pues el funtor $\mathcal{F}$ refleja isomorfismos ya que es plenamente fiel. Ahora dada una flecha $f : A \to B$ en $\mathfrak{C}$ entonces $\mathcal{F}f : \mathcal{F}A \to \mathcal{F}B$ está en $\mathfrak{D}$ pues $\mathcal{F}$ es un funtor, luego por ser τ una transformación natural el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
1_{\mathfrak{D}}\mathcal{F}A \arrow[r, "\tau_{\mathcal{F}A}"] \arrow[d, "1_{\mathfrak{D}}\mathcal{F}f"'] & (\mathcal{F}\circ\mathcal{G})\mathcal{F}A \arrow[d, "(\mathcal{F}\circ\mathcal{G})\mathcal{F}f"] \\
1_{\mathfrak{D}}\mathcal{F}B \arrow[r, "\tau_{\mathcal{F}B}"'] & (\mathcal{F}\circ\mathcal{G})\mathcal{F}B
\end{tikzcd}$$

conmuta y por tanto $\tau_{\mathcal{F}B} \circ \mathcal{F}f = (\mathcal{F} \circ \mathcal{G})\mathcal{F}f \circ \tau_{\mathcal{F}A}$ *pero como* $\tau_{\mathcal{F}B} = \mathcal{F}\mu_B$ *y* $\tau_{\mathcal{F}A} = \mathcal{F}\mu_A$ *entonces* $\mathcal{F}\mu_B \circ \mathcal{F}f = (\mathcal{F} \circ \mathcal{G})\mathcal{F}f \circ \mathcal{F}\mu_A$

luego $\mathcal{F}(\mu_B \circ f) = \mathcal{F}((\mathcal{G} \circ \mathcal{F})f \circ \mu_A)$ *pues* $\mathcal{F}$ *es un funtor.*

Ahora vemos que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} 1_{\mathfrak{C}}A \arrow[r, "\mu_A"] \arrow[d, "1_{\mathfrak{C}}f"'] & (\mathcal{G} \circ \mathcal{F})A \arrow[d, "(\mathcal{G}\circ\mathcal{F})f"] \\ 1_{\mathfrak{C}}B \arrow[r, "\mu_B"'] & (\mathcal{G} \circ \mathcal{F})B \end{tikzcd}$$

conmuta pues tenemos que $A, (\mathcal{G} \circ \mathcal{F})B \in \mathfrak{C}$ *luego la aplicación*

$$\begin{array}{rcl} Mor_{\mathfrak{C}}(A, (\mathcal{G} \circ \mathcal{F})B) & \longrightarrow & Mor_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}A, \mathcal{F}(\mathcal{G} \circ \mathcal{F})B) \\ g & \mapsto & \mathcal{F}g \end{array}$$

es inyectiva dado que $\mathcal{F}$ *es fiel y como la composición de flechas* $\mu_B \circ f, (\mathcal{G} \circ \mathcal{F})f \circ \mu_A \in Mor_{\mathfrak{C}}(A, (\mathcal{G} \circ \mathcal{F})B)$ *tal que* $\mathcal{F}(\mu_B \circ f) = \mathcal{F}((\mathcal{G} \circ \mathcal{F})f \circ \mu_A)$ *entonces* $\mu_B \circ f = (\mathcal{G} \circ \mathcal{F})f \circ \mu_A$.

Luego $\mathcal{G} \circ \mathcal{F} \approx 1_{\mathfrak{C}}$.

Por lo tanto $\mathcal{F}$ *es una equivalencia.*

■

Observación 3.4.2.

Cuando dos categorías $\mathfrak{C}$ *y* $\mathfrak{D}$ *son equivalentes podemos pensar que los objetos de* $\mathfrak{C}$ *son los mismos que los objetos de* $\mathfrak{D}$ *y las flechas de* $\mathfrak{C}$ *son las mismas que las flechas de* $\mathfrak{D}$*. Esto es útil cuando tenemos una equivalencia entre una categoría abstracta o desconocida y una categoría conocida, digamos la categoría* **Set**.

Proposición 3.4.3. *Sean* $\mathfrak{C}$ *y* $\mathfrak{D}$ *dos categorías.*

Si el funtor $\mathcal{F} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ es un isomorfimo entonces $\mathcal{F}$ es una equivalencia.

Demostración:

Ya que $\mathcal{F}$ es un isomorfismo entonces tenemos que es plenamente fiel y biyectivo en objetos, esto último quiere decir que la aplicación

$$\begin{array}{rcl} F_0 : Ob(\mathfrak{C}) & \longrightarrow & Ob(\mathfrak{D}) \\ C & \mapsto & F_0(C) := \mathcal{F}C \end{array}$$

es biyectiva.

Gracias a la última proposición solo nos falta probar que $\mathcal{F}$ sea denso.

En efecto: Dado un $B \in \mathfrak{D}$ entonces existe un único $A \in \mathfrak{C}$ tal que $F_0(A) = \mathcal{F}A = B$ y esto último implica que $\mathcal{F}A \cong B$.

Por lo tanto $\mathcal{F}$ es denso.

$\blacksquare$

Observación 3.4.4. *La recíproca de la proposición anterior es falsa.*

En efecto:

Consideremos un cuerpo $\mathbb{K}$.

Vamos a definir una categoría $\mathfrak{C}$ de la siguiente manera:

$Ob(\mathfrak{C}) = \mathbb{N}$ y para cada $n, m \in \mathbb{N}$ tenemos $Mor_{\mathfrak{C}}(n, m) = M_{m\times n}(\mathbb{K})$ donde $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ es el conjunto de matrices de orden $m \times n$ con entradas en $\mathbb{K}$.

La composición está dada por el producto de matrices y las identidades son las matrices identidad.

Afirmación *: $\boldsymbol{Vect}_{\mathbb{K},fin}$ es equivalente a $\mathfrak{C}$.*

En efecto:

Para cada $V \in \boldsymbol{Vect}_{\mathbb{K},fin}$ *fijamos una base* β_V *de* V.

Si $T : V \to W$ *es una transformación lineal, definimos* A_T *como la matriz asociada a* T *en las bases* β_V *y* β_W.

Definimos $\mathcal{F} : \boldsymbol{Vect}_{\mathbb{K},fin} \to \mathfrak{C}$ *de la siguiente manera:*

En objetos*: Para cada objeto* $V \in \boldsymbol{Vect}_{\mathbb{K},fin}$ *definimos un objeto* $\mathcal{F}V := Dim(V)$ *en* $\mathfrak{C}$ *donde* $Dim(V)$ *es la dimensión del espacio vectorial* V.

En flechas*: Dada la flecha* $T : V \to W$ *en* $\boldsymbol{Vect}_{\mathbb{K},fin}$ *definimos la flecha* $\mathcal{F}T := A_T : \mathcal{F}V = Dim(V) = n \to \mathcal{F}W = Dim(W) = m$ *en* $\mathfrak{C}$ *donde* $A_T \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$.

Es fácil ver que $\mathcal{F}$ *es un funtor.*

También $\mathcal{F}$ *es fiel pues para cada* $V, W \in \boldsymbol{Vect}_{\mathbb{K},fin}$ *la aplicación*

$$\begin{array}{rcl} F_{\mathcal{F}} : Mor_{\boldsymbol{Vect}_{\mathbb{K},fin}}(V,W) & \longrightarrow & Mor_{\mathfrak{C}}(\mathcal{F}V, \mathcal{F}W) \\ \psi & \mapsto & F_{\mathcal{F}}(\psi) := \mathcal{F}\psi \end{array}$$

es inyectiva ya que si tomamos $T, L \in Mor(V, W)$ *con la condición de que* $\mathcal{F}T = \mathcal{F}L$ *entonces* $A_T = A_L$ *luego* $T = L$ *ya que* A_T *y* A_L *son las matrices asociadas a las transformaciones lineales* T *y* L *respectivamente.*

Ahora veamos que $\mathcal{F}$ *es pleno. En efecto: Para cualesquiera* $V, W \in \boldsymbol{Vect}_{\mathbb{K},fin}$ *la aplicación*

$$\begin{array}{rcl} F_{\mathcal{F}} : Mor_{\boldsymbol{Vect}_{\mathbb{K},fin}}(V,W) & \longrightarrow & Mor_{\mathfrak{C}}(\mathcal{F}V, \mathcal{F}W) \\ \psi & \mapsto & F_{\mathcal{F}}(\psi) := \mathcal{F}\psi \end{array}$$

es sobreyectiva ya que si tomamos una flecha $A \in Mor_{\mathfrak{C}}(\mathcal{F}V, \mathcal{F}W) = Mor_{\mathfrak{C}}(Dim(V), Dim(W)) = Mor_{\mathfrak{C}}(m, n)$

entonces $A \in Mor_{\mathfrak{C}}(m,n)$ *luego* A *es la matriz asociada de alguna transformación lineal digamos* $T : V \to W$ *en las bases* β_V *y* β_w *donde* $Dim(V) = n$ *y* $Dim(W) = m$. *Por lo tanto existe* $T : V \to W$ *en* $Mor_{\boldsymbol{Vect}_{\mathbb{K},fin}}(V,W)$ *tal que* $F_{\mathcal{F}}(T) = \mathcal{F}t = A_T = A$.

Por último vemos que $\mathcal{F}$ *es denso para cada* $n \in Ob(\mathfrak{C}) = \mathbb{N}$ *existe un* $V \in \boldsymbol{Vect}_{\mathbb{K},fin}$ *tal que* $\mathcal{F}V = Dim(V) = n$.

Por lo tanto $\mathcal{F}$ *es una equivalencia ya que es fiel, pleno y denso.*

Por otro lado $\mathcal{F}$ *no es un isomorfismo pues no es biyectivo en objetos ya que hay diferentes espacios vectoriales con la misma dimensión.*

Chapter 4

Funtores representables

4.1 Definición de funtor representable

Definición 4.1.1. *Sea $\mathfrak{C}$ una categoría localmente pequeña.*

1. *Un funtor $\mathcal{F} : \mathfrak{C} \to \boldsymbol{Set}$ covariante se dice* ***representable***

   si $\mathcal{F} \cong \mathcal{H}^X$ para algún $X \in \mathfrak{C}$.

2. *Un funtor $\mathcal{F} : \mathfrak{C} \to \boldsymbol{Set}$ contravariante se dice* ***representable***

   si $\mathcal{F} \cong \mathcal{H}_X$ para algún $X \in \mathfrak{C}$.

   En cada caso decimos que el funtor $\mathcal{F}$ es representado por el objeto X.

Ejemplos 4.1.2.

1. *El funtor de olvido $\mathcal{F} : \boldsymbol{Grp} \to \boldsymbol{Set}$ es representado por el grupo $\mathbb{Z}$.*

2. *El funtor contravariante $\mathcal{F} : \boldsymbol{Set} \to \boldsymbol{Set}$ es representado por el conjunto $\{0, 1\}$, donde $\mathcal{F}$ es definido de la siguiente manera:*

En objetos: *Para cada* $A \in \textbf{\textit{Set}}$ *definimos* $\mathcal{F}A := \mathcal{P}(A)$ *donde* $\mathcal{P}(A)$ *es el conjunto potencia de* A.

En flechas: *Para cada flecha* $f : A \to B$ *en* ***Set*** *definimos la flecha*

$$\begin{aligned} \mathcal{F}f : \mathcal{F}B &\longrightarrow \mathcal{F}A \\ B_1 &\mapsto f^{-1}(B_1) \end{aligned}$$

en ***Set***.

3. *El funtor de olvido* $\mathcal{F} : \textbf{\textit{Ring}} \to \textbf{\textit{Set}}$ *es representado por el anillo* $\mathbb{Z}[x]$.

4.2 Objeto universal

Definición 4.2.1. *Sea* $\mathfrak{C}$ *una categoría localmente pequeña.*

1. *Si* $\mathcal{F} : \mathfrak{C} \to \textbf{\textit{Set}}$ *es un funtor covariante entonces un par* (X, a) *donde* $X \in \mathfrak{C}$ *y* $a \in \mathcal{F}X$, *es un* ***objeto universal*** *si para cada* $U \in \mathfrak{C}$ *y para cada* $b \in \mathcal{F}U$ *existe una única flecha* $f : X \to U$ *tal que* $\mathcal{F}f(a) = b$.

2. *Si* $\mathcal{F} : \mathfrak{C} \to \textbf{\textit{Set}}$ *es un funtor contravariante entonces un par* (X, a) *donde* $X \in \mathfrak{C}$ *y* $a \in \mathcal{F}X$, *es un* ***objeto universal*** *si para cada* $U \in \mathfrak{C}$ *y para cada* $b \in \mathcal{F}U$ *existe una única flecha* $f : U \to X$ *tal que* $\mathcal{F}f(a) = b$.

Ejemplos 4.2.2.

1. *El funtor de olvido* $\mathcal{F} : \boldsymbol{Grp} \to \boldsymbol{Set}$ *tiene como objeto universal a* $(\mathbb{Z}, 1)$

2. *El funtor contravariante* $\mathcal{F} : \boldsymbol{Set} \to \boldsymbol{Set}$ *definido anteriormente tiene como objeto universal a* $(\{0, 1\}, \{1\})$,

3. *El funtor de olvido* $\mathcal{F} : \boldsymbol{Ring} \to \boldsymbol{Set}$ *tiene como objeto universal a* $(\mathbb{Z}[x], x)$.

Observación 4.2.3.

Veremos que los objetos universales son únicos, antes vamos a definir una nueva categoría. Dado un funtor contravariante $\mathcal{F} : \mathfrak{C} \to \boldsymbol{Set}$ *podemos definir una nueva categoría* $\boldsymbol{El}_{\mathcal{F}}$ *llamada la categoría de los elementos del funtor contravariante* $\mathcal{F}$ *de la siguiente manera:*

En objetos*: Los objetos son pares* (X, a) *donde* $X \in \mathfrak{C}$ *y* $a \in \mathcal{F}X$

En flechas*: Las flechas* $(X, a) \to (Y, b)$ *en* $\boldsymbol{El}_{\mathcal{F}}$ *son las flechas* $f : X \to Y$ *en* $\mathfrak{C}$ *tales que* $\mathcal{F}f(b) = a$.

Similarmente podemos definir $\boldsymbol{El}^{\mathcal{F}}$ *llamada la categoría de los elementos del funtor covariante* $\mathcal{F} : \mathfrak{C} \to \boldsymbol{Set}$ *de la siguiente manera:*

En objetos*: Los objetos son pares* (X, a) *donde* $X \in \mathfrak{C}$ *y* $a \in \mathcal{F}X$

En flechas*: Las flechas* $(X, a) \to (Y, b)$ *en* $\boldsymbol{El}^{\mathcal{F}}$ *son las flechas* $f : X \to Y$ *en* $\mathfrak{C}$ *tal que* $\mathcal{F}f(a) = b$.

Es fácil ver que $(X, a) \cong (Y, b)$ *en* $\boldsymbol{El}_{\mathcal{F}}$ *si y solo si existe un isomorfismo* $f : X \to Y$ *en* $\mathfrak{C}$ *tal que* $\mathcal{F}f(b) = a$ *y* $(X, a) \cong (Y, b)$ *en* $\boldsymbol{El}^{\mathcal{F}}$ *si y solo si existe un isomorfismo* $g : X \to Y$ *en* $\mathfrak{C}$ *tal que* $\mathcal{F}g(a) = b$.

Teorema 4.2.4. *Si* (X, a) *es un objeto universal del funtor contravariante* $\mathcal{F} : \mathfrak{C} \to \boldsymbol{Set}$ *entonces es único salvo isomorfismos.*

Demostración:

Sea (Y, b) *otro objeto universal del funtor contravariante*

$\mathcal{F} : \mathfrak{C} \to$ ***Set***.

Afirmación: $(X, a) \cong (Y, b)$.

En efecto:

Ya que (Y, b) *es otro objeto universal del funtor contravariante* $\mathcal{F} : \mathfrak{C} \to$ ***Set*** *entonces existe una única flecha* $f : X \to Y$ *tal que* $\mathcal{F}f(b) = a$. *Dado que* (X, a) *también es un objeto universal del funtor contravariante* $\mathcal{F} : \mathfrak{C} \to$ ***Set*** *entonces existe una única flecha* $g : Y \to X$ *tal que* $\mathcal{F}g(a) = b$. *Tenemos que* $\mathcal{F}(g \circ f)(a) = (\mathcal{F}f \circ \mathcal{F}g)(a) = a$.

Ahora observemos que $\mathcal{F}1_X(a) = a$ *entonces* $g \circ f = 1_X$ *pues* (X, a) *es objeto universal del funtor contravariante* $\mathcal{F} : \mathfrak{C} \to$ ***Set*** *y por otro lado tenemos que* $\mathcal{F}(f \circ g)(b) = (\mathcal{F}g \circ \mathcal{F}f)(b) = b$.

Ahora observemos que $\mathcal{F}1_Y(b) = b$ *entonces* $f \circ g = 1_Y$ *pues* (Y, b) *es objeto universal del funtor contravariante* $\mathcal{F} : \mathfrak{C} \to$ ***Set***. *Luego existe una flecha* $g : Y \to X$ *en* $\mathfrak{C}$ *tal que* $g \circ f = 1_X$ *y* $f \circ g = 1_Y$ *y esto quiero decir que* $f : X \to Y$ *es un isomorfismo.*

$\blacksquare$

Chapter 5

El Lema de Yoneda

En este capítulo vamos a definir la categoría de los funtores contravariantes y el funtor de Yoneda así como también enunciar y demostrar el famoso Lema de Yoneda y sus corolarios.

5.1 La categoría de Yoneda $[\mathfrak{C}, \mathbf{Set}]$

Definición 5.1.1. *Sea $\mathfrak{C}$ una categoría.*

Consideremos la categoría $[\mathfrak{C}, \boldsymbol{Set}]$ donde los objetos son funtores contravariantes de la forma $\mathcal{F} : \mathfrak{C} \to \boldsymbol{Set}$ y las flechas vienen hacer transformaciones naturales de la forma $\tau : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ donde $\mathcal{F}, \mathcal{G} : \mathfrak{C} \to \boldsymbol{Set}$. Es fácil ver que justamente $[\mathfrak{C}, \boldsymbol{Set}]$ es una categoría usando la parte 1 y 2 de 3.1.3. LLamaremos a $[\mathfrak{C}, \boldsymbol{Set}]$ la ***categoría de Yoneda****. Similarmente definimos la categoría $[\mathfrak{C}, \boldsymbol{Set}]_{cov}$ donde los objetos son funtores covariantes de la forma $\mathcal{F} : \mathfrak{C} \to \boldsymbol{Set}$ y las flechas son las transformaciones naturales de la forma $\tau : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$.*

5.2 El funtor de Yoneda $\mathcal{H} : \mathfrak{C} \to [\mathfrak{C}, \mathbf{Set}]$

Definición 5.2.1. *Sea $\mathfrak{C}$ una categoría localmente pequeña.*

Gracias al funtor $\mathcal{H}_X$ podemos definir un funtor $\mathcal{H} : \mathfrak{C} \to [\mathfrak{C}, \boldsymbol{Set}]$ de la siguiente manera:

***En objetos**: Para cada $Y \in \mathfrak{C}$ tenemos que $\mathcal{H}Y := \mathcal{H}_Y : \mathfrak{C} \to \boldsymbol{Set}$.*

***En flechas**: Para cada fecha $f : Y \to Z$ en $\mathfrak{C}$ tenemos que*

$\mathcal{H}f := \mathcal{H}_f : \mathcal{H}Y := \mathcal{H}_Y \to \mathcal{H}Z := \mathcal{H}_Z$

que justamente es una transformación natural pues para cada $U \in \mathfrak{C}$ se tiene que la flecha

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{H}_f U : \mathcal{H}_Y U & \longrightarrow & \mathcal{H}_Z U \\ g & \longmapsto & \mathcal{H}_f U(g) := f \circ g \end{array}$$

*está en **Set** y para cada flecha $\varphi : U \to V$ en $\mathfrak{C}$ tenemos que el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H}_Y U \arrow[r, "\mathcal{H}_f U"] & \mathcal{H}_Z U \\ \mathcal{H}_Y V \arrow[u, "\mathcal{H}_Y \varphi"] \arrow[r, "\mathcal{H}_f V"'] & \mathcal{H}_Z V \arrow[u, "\mathcal{H}_Z \varphi"'] \end{tikzcd}$$

conmuta pues

$(\mathcal{H}_f U \circ \mathcal{H}_Y \varphi)(\alpha) = \mathcal{H}_f U(\mathcal{H}_Y \varphi(\alpha)) = \mathcal{H}_f U(\alpha \circ \varphi) = f \circ (\alpha \circ \varphi)$

y

$(\mathcal{H}_Z \varphi \circ \mathcal{H}_f V)(\alpha) = \mathcal{H}_Z \varphi(\mathcal{H}_f V(\alpha)) = h_Z \varphi(f \circ \alpha) = (f \circ \alpha) \circ \varphi = f \circ (\alpha \circ \varphi)$.

*Así definido $\mathcal{H}$ es un funtor llamado el **funtor de Yoneda**.*

Observaciones 5.2.2.

1. *Similarmente podemos definir el funtor contravariante de Yoneda* $\mathcal{H} : \mathfrak{C} \to [\mathfrak{C}, \boldsymbol{Set}]_{cov}$.

2. *Demostraremos los corolarios del lema de Yoneda utilizando el funtor de Yoneda* $\mathcal{H} : \mathfrak{C} \to [\mathfrak{C}, \boldsymbol{Set}]$*, para el caso del funtor contravariante de Yoneda* $\mathcal{H} : \mathfrak{C} \to [\mathfrak{C}, \boldsymbol{Set}]_{cov}$ *todo es similar.*

5.3 El lema de Yoneda

Proposición 5.3.1. ***(Lema de Yoneda)***

Sea $\mathcal{F} : \mathfrak{C} \to \boldsymbol{Set}$ *un funtor contravariante y* $\mathfrak{C}$ *una categoría localmente pequeña. Para cualquier* $X \in \mathfrak{C}$ *se cumple que existe una aplicación biyectiva*

$$T : \mathcal{F}X \longrightarrow Mor_{[\mathfrak{C}, \boldsymbol{Set}]}(\mathcal{H}_X, \mathcal{F})$$

Demostración:

Definimos T *de la siguiente manera:*

$$\begin{aligned} T : \mathcal{F}X &\longrightarrow Mor_{[\mathfrak{C}, \boldsymbol{Set}]}(\mathcal{H}_X, \mathcal{F}) \\ a &\longmapsto T(a) := \tau^a \end{aligned}$$

tal que para cada $U \in \mathfrak{C}$ *se tiene que*

$$\begin{aligned} \tau^a_U : \mathcal{H}_X U &\longrightarrow \mathcal{F}U \\ f &\longmapsto \tau^a_U(f) := \mathcal{F}f(a) \end{aligned}$$

Vemos que τ_U^a está bien definida ya que $f : U \to X \in \mathcal{H}_X U := Mor_{\mathfrak{C}}(U, X)$ luego $\mathcal{F}f : \mathcal{F}X \to \mathcal{F}U$ es una flecha en ***Set*** *ya que $\mathcal{F} : \mathfrak{C} \to$* ***Set*** *es un funtor contravariante y como $a \in \mathcal{F}X$ entonces $\mathcal{F}f(a) \in \mathcal{F}U$.*

Ahora veamos que $\tau^a : \mathcal{H}_X \to \mathcal{F}$ es una transformación natural.

En efecto:

Dada una flecha $\alpha : U \to V$ en $\mathfrak{C}$ vemos que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}_X U \arrow[r, "\tau_U^a"] & \mathcal{F}U \\
\mathcal{H}_X V \arrow[u, "\mathcal{H}_X\alpha"] \arrow[r, "\tau_V^a"'] & \mathcal{F}V \arrow[u, "\mathcal{F}\alpha"']
\end{tikzcd}$$

es conmutativo pues $(\tau_u^a \circ \mathcal{H}_X\alpha)(r) = \tau_U^a(\mathcal{H}_X\alpha(r)) = \tau_U^a(r \circ \alpha) = \mathcal{F}r \circ \alpha(a)$ y $(\mathcal{F}\alpha \circ \tau_V^a)(r) = \mathcal{F}\alpha(\tau_V^a(r)) = \mathcal{F}\alpha(\mathcal{F}r(a)) = (\mathcal{F}\alpha \circ \mathcal{F}r)(a) = \mathcal{F}r \circ \alpha(a)$ luego τ^a es una transformación natural.

Por lo tanto T está bien definida.

Afirmación 1*: T es inyectiva.*

En efecto:

Sean $a, b \in \mathcal{F}X$ tales que $\tau^a = \tau^b$.

Tomemos $U = X$ luego

$$\begin{aligned} \tau_X^a : \mathcal{H}_X X &\longrightarrow \mathcal{F}X \\ 1_X &\longmapsto a \end{aligned}$$

pues $\tau_X^a(1_X) = \mathcal{F}1_X(a) = 1_{\mathcal{F}X}(a) = a$ y dado que $\tau^a = \tau^b$ entonces $\tau_X^a = \tau_X^b$ luego $\tau_X^a(1_X) = \tau_X^b(1_X)$ entonces $a = b$.

Por lo tanto T es inyectiva.

Afirmación 2*: T es sobreyectiva.*

En efecto:

Por probar que para cada $\tau \in Mor_{[\mathfrak{C},\boldsymbol{Set}]}(\mathcal{H}_X, \mathcal{F})$ existe un $a \in \mathcal{F}X$ tal que $\tau_U^a = \tau_U$ para cada $U \in \mathfrak{C}$.

Dada $\tau \in Mor_{[\mathfrak{C},\boldsymbol{Set}]}(\mathcal{H}_X, \mathcal{F})$ y un objeto $U \in \mathfrak{C}$.

Consideremos la flecha $\alpha : U \to X$ en $\mathfrak{C}$ entonces el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}_X U \arrow[r, "\tau_U"] & \mathcal{F}U \\
\mathcal{H}_X X \arrow[u, "\mathcal{H}_X\alpha"] \arrow[r, "\tau_X"'] & \mathcal{F}X \arrow[u, "\mathcal{F}\alpha"']
\end{tikzcd}$$

conmuta pues $\tau : \mathcal{H}_X \to \mathcal{F}$ es una transformación natural.

Tenemos que $(\tau_U \circ \mathcal{H}_X\alpha)(1_X) = \tau_U(\mathcal{H}_X\alpha(1_X)) = \tau_U(1_X \circ \alpha) = \tau_U(\alpha)$ pues $1_X \in \mathcal{H}_X X$ y por otro lado como el diagrama conmuta entonces tenemos la siguiente igualdad $(\tau_U \circ \mathcal{H}_X\alpha) = (\mathcal{F}\alpha \circ \tau_X)$ luego $(\tau_U \circ \mathcal{H}_X\alpha)(1_X) = (\mathcal{F}\alpha \circ \tau_X)(1_X) = \mathcal{F}\alpha(\tau_X(1_X))$ y llamemos a $\tau_X(1_X) := a \in \mathcal{F}X$ entonces $\tau_U^a(\alpha) := \mathcal{F}\alpha(a) = (\tau_U \circ \mathcal{H}_X\alpha)(1_X)$ luego tenemos que $\tau_U(\alpha) = \tau_U^a(\alpha)$. Por lo tanto T es sobreyectiva.

■

5.4 Corolarios del lema de Yoneda

En esta sección veremos **la inmersión de Yoneda o Yoneda Embedding** como un corolario del Lema de Yoneda y luego una caracterización de dos objetos isomorfos. Pero antes vamos a definir lo que es una inmersión.

Definición 5.4.1. *Sean $\mathfrak{D}, \mathfrak{E}$ dos categorías y sea $\mathcal{F} : \mathfrak{D} \to \mathfrak{E}$ un funtor.*

*El funtor $\mathcal{F}$ es una **inmersión** si es plenamente fiel e inyectivo en objetos.*

Corolario 5.4.2. ***(Inmersión de Yoneda)***

Sea $\mathfrak{C}$ una categoría localmente pequeña.

*El funtor de Yoneda $\mathcal{H} : \mathfrak{C} \to [\mathfrak{C}, \boldsymbol{Set}]$ es una inmersión, llamada **inmersión de Yoneda**.*

Demostración:

Afirmación 1: *$\mathcal{H}$ es inyectivo en objetos.*

En efecto:

Recordemos que $\mathcal{H}$ es inyectivo en objetos si la siguiente aplicación

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0 : Ob(\mathfrak{C}) &\longrightarrow Ob([\mathfrak{C}, \boldsymbol{Set}]) \\ C &\mapsto \mathcal{H}_0(C) := \mathcal{H}C \end{aligned}$$

es inyectiva, donde $\mathcal{H}C := \mathcal{H}_C : \mathfrak{C} \to \boldsymbol{Set}$.

Vemos que $\mathcal{H}_0$ es inyectiva pues dados dos objetos $C, D \in \mathfrak{C}$ tales que $\mathcal{H}_0(C) = \mathcal{H}_0(D)$ entonces por la definición de $\mathcal{H}$ tenemos que $\mathcal{H}_C = \mathcal{H}_D : \mathfrak{C} \to \boldsymbol{Set}$, ahora evaluemos $\mathcal{H}_C$ y $\mathcal{H}_D$ en C o sea que $\mathcal{H}_C C = \mathcal{H}_D C$ entonces tenemos que $Mor(C, C) = Mor(C.D)$, luego por definición de categoría $C = D$. Por lo tanto $\mathcal{H}$ es inyectivo en objetos.

Afirmación 2: *$\mathcal{H}$ es plenamente fiel.*

En efecto:

Queremos demostrar que para cada $X, Y \in \mathfrak{C}$ la aplicación $h_{\mathcal{H}} : Mor_{\mathfrak{C}}(X, Y) \to Mor_{[\mathfrak{C}, \boldsymbol{Set}]}(\mathcal{H}_X, \mathcal{H}_Y)$ es biyectiva. Sean $X, Y \in \mathfrak{C}$ y hagamos $\mathcal{H}_Y = \mathcal{F}$ entonces $\mathcal{H}_Y X = \mathcal{F}X$ luego

$Mor_{\mathfrak{C}}(X, Y) = \mathcal{H}_Y X = \mathcal{F}X$ *y* $Mor_{[\mathfrak{C}, \boldsymbol{Set}]}(\mathcal{H}_X, \mathcal{H}_Y) = Mor_{[\mathfrak{C}, \boldsymbol{Set}]}(\mathcal{H}_X, \mathcal{F})$ *entonces* $h_{\mathcal{H}}$ *va de* $\mathcal{F}X$ *a* $Mor_{[\mathfrak{C}, \boldsymbol{Set}]}(\mathcal{H}_X, \mathcal{F})$ *luego por el lema de Yoneda* $h_{\mathcal{H}}$ *es biyectiva. Por lo tanto* $\mathcal{H}$ *es plenamente fiel.*

$\blacksquare$

Observaciones 5.4.3.

1. *Gracias a la inmersión de Yoneda podemos identificar un objeto* $X \in \mathfrak{C}$ *con su imagen por la inmersión* $\mathcal{H} : \mathfrak{C} \to [\mathfrak{C}, \boldsymbol{Set}]$*, es decir, con el funtor* $\mathcal{H}_X : \mathfrak{C} \to \boldsymbol{Set}$ *dado por* $\mathcal{H}_X Y := Mor_{\mathfrak{C}}(Y, X)$.

2. *Vamos a denotar por* $[\mathfrak{C}, \boldsymbol{Set}]_{rep}$ *a la categoría de los funtores representables, esto quiere decir que si* $\mathcal{F} \in [\mathfrak{C}, \boldsymbol{Set}]_{rep}$*, donde* $\mathcal{F}$ *es un funtor contravariante entonces* $\mathcal{F} \cong \mathcal{H}_X$ *para algún* $X \in \mathfrak{C}$.

3. *Como consecuencia del corolario anterior podemos identificar la categoría* $\mathfrak{C}$ *con la categoría* $[\mathfrak{C}, \boldsymbol{Set}]_{rep}$ *y por lo tanto* $\mathfrak{C} \cong [\mathfrak{C}, \boldsymbol{Set}]_{rep}$*. Dicho de otro modo el funtor* $\mathcal{H} : \mathfrak{C} \to [\mathfrak{C}, \boldsymbol{Set}]_{rep}$ *es plenamente fiel y biyectivo en objetos.*

   Este resultado nos dice que podemos pensar en los objetos $X \in \mathfrak{C}$ *como funtores* $\mathcal{H}_X$ *y las flechas* $f : A \to B$ *de* $\mathfrak{C}$ *como transformaciones naturales entre funtores de la forma* $\mathcal{H}_A \to \mathcal{H}_B$.

4. *Yoneda embedding es ideal cuando queremos transportar problemas de una categoría arbitraria* $\mathfrak{C}$ *para la categoría* $[\mathfrak{C}, \boldsymbol{Set}]$ *ya que esta última categoría tiene propiedades categóricas muy utiles.*

El siguiente corolario es una caracterización de dos objetos isomorfos.

Corolario 5.4.4. *Sea $\mathfrak{C}$ una categoría localmente pequeña.*

Para cada $A, B \in \mathfrak{C}$ se tiene que $f : A \to B$ es un isomorfismo en $\mathfrak{C}$ sí y solo si $\mathcal{H}_A \to \mathcal{H}_B$ es un isomorfismo en $[\mathfrak{C}, \boldsymbol{Set}]$.

En otras palabras $A \cong B$ sí y solo si $\mathcal{H}_A \cong \mathcal{H}_B$.

Demostración:

($\Longrightarrow$) Ya que $\mathcal{H} : \mathfrak{C} \to [\mathfrak{C}, \boldsymbol{Set}]$ es un funtor entonces preserva isomorfismos por lo tanto si $A, B \in \mathfrak{C}$ tal que $f : A \to B$ es un isomorfismo en $\mathfrak{C}$ entonces $\mathcal{H}f := \mathcal{H}_f : \mathcal{H}A := \mathcal{H}_A \to \mathcal{H}B := \mathcal{H}_B$ es un isomorfismo en $[\mathfrak{C}, \boldsymbol{Set}]$.

($\Longleftarrow$) Por el corolario anterior $\mathcal{H} : \mathfrak{C} \to [\mathfrak{C}, \boldsymbol{Set}]$ es plenamente fiel entonces refleja isomorfismos; esto quiere decir que para cada $A, B \in \mathfrak{C}$ con $f : A \to B$ en $\mathfrak{C}$ tal que $\mathcal{H}f := \mathcal{H}_f : \mathcal{H}A := \mathcal{H}_A \to \mathcal{H}B := \mathcal{H}_B$ es un isomorfismo en $[\mathfrak{C}, \boldsymbol{Set}]$ entonces $f : A \to B$ es un isomorfismo en $\mathfrak{C}$.

$\blacksquare$

Chapter 6

Las aplicaciones del lema de Yoneda

6.1 Una aplicación del lema de Yoneda a la teoría de categorías

Nuestra primera aplicación del lema de Yoneda es caracterizar funtores representables. Enunciemos la aplicación en el siguiente teorema:

Teorema 6.1.1. *Sea $\mathfrak{C}$ una categoría localmente pequeña y $\mathcal{F} : \mathfrak{C} \to$ **Set** un funtor covariante o contravariante.*

Entonces $\mathcal{F}$ es un funtor representable sí y solo si tiene objeto universal.

Demostración:

Demostraremos el teorema para el caso en el que $\mathcal{F} : \mathfrak{C} \to \mathbf{Set}$ sea un funtor contravariante.
($\Rightarrow$) Como $\mathcal{F} : \mathfrak{C} \to \mathbf{Set}$ es representable entonces tenemos que $\mathcal{F} \cong \mathcal{H}_X$

para algún $X \in \mathfrak{C}$.
Afirmación : $(X, \tau_X(1_X))$ es un objeto universal de $\mathcal{F}$, donde
$\tau : \mathcal{H}_X \to \mathcal{F}$ es el isomorfismo natural ya que $\mathcal{F} \cong \mathcal{H}_X$.
En efecto:
Dados $U \in \mathfrak{C}$ y $a \in \mathcal{F}U$. Debemos demostrar que existe una única flecha
$f : U \to X$ en $\mathfrak{C}$ tal que $\mathcal{F}f(\tau_X(1_X)) = a$.
Por el lema de Yoneda existe una aplicación biyectiva $T : \mathcal{F}X \to Mor_{[\mathfrak{C},\mathbf{Set}]}(\mathcal{H}_X, \mathcal{F})$.
Dado que $\tau : \mathcal{H}_X \to \mathcal{F} \in Mor_{[\mathfrak{C},\mathbf{Set}]}(\mathcal{H}_X, \mathcal{F})$ entonces existe un único
objeto $\tau_X(1_X) \in \mathcal{F}X$ con $T(\tau_X(1_X)) = \tau$ tal que para cada $V \in \mathfrak{C}$
se tiene que

$$\begin{aligned} \tau_V : \mathcal{H}_X V &\longrightarrow \mathcal{F}V \\ g &\longmapsto \mathcal{F}g(\tau_X(1_X)) \end{aligned}$$

pero τ_V es biyectiva pues $\tau : \mathcal{H}_X \to \mathcal{F}$ es isomorfismo natural.
Ahora dados $U \in \mathfrak{C}$ y $a \in \mathcal{F}U$ tenemos que $\tau_U : \mathcal{H}_X U \to \mathcal{F}U$ es
biyectiva haciendo $V = U$ y dado que $a \in \mathcal{F}U$ existe una única flecha
$f : U \to X$ en $\mathfrak{C}$ tal que $\tau_U(f) := \mathcal{F}f(\tau_X(1_X)) = a$.
$(\Leftarrow)$ Supongamos que (X, a) es un objeto universal del funtor
contravariante $\mathcal{F} : \mathfrak{C} \to \mathbf{Set}$, donde $X \in \mathfrak{C}$ y $a \in \mathcal{F}X$.
Afirmación: $\mathcal{F} \cong \mathcal{H}_X$.
(Esta afirmación quiere decir que existe una transformación natural
$\tau : \mathcal{H}_X \to \mathcal{F}$ tal que para cada $U \in \mathfrak{C}$ se tiene que la flecha
$\tau_U : \mathcal{H}_X U \to \mathcal{F}U$ en **Set** es un isomorfismo)
Por el lema de Yoneda existe una aplicación biyectiva $T : \mathcal{F}X \to Mor_{[\mathfrak{C},\mathbf{Set}]}(\mathcal{H}_X, \mathcal{F})$
y dado que $a \in \mathcal{F}X$ entonces existe una transformación natural
$T(a) := \tau : \mathcal{H}_X \to \mathcal{F}$ tal que para cada $V \in \mathfrak{C}$ se tiene que

$$\begin{aligned} \tau_V : \mathcal{H}_X V &\longrightarrow \mathcal{F}V \\ g &\longmapsto \mathcal{F}g(a) \end{aligned}$$

Ya tenemos la existencia de la transformación natural $\tau : \mathcal{H}_X \to \mathcal{F}$.
Ahora dados $U \in \mathfrak{C}$ y $b \in \mathcal{F}U$ tenemos que existe una única flecha
$f : U \to X$ tal que $\mathcal{F}f(a) = b$ pues (X, a) es objeto universal de $\mathcal{F}$.
Esto quiere decir que la flecha en la categoría **Set**

$$\begin{aligned} \tau_U : \mathcal{H}_X U &\longrightarrow \mathcal{F}U \\ g &\longmapsto \mathcal{F}g(a) \end{aligned}$$

es biyectiva ya que dado $b \in \mathcal{F}U$ existe una única flecha
$f : U \to X \in \mathcal{H}_X U$ tal que $\tau_U(f) := \mathcal{F}f(a) = b$.
Luego tenemos que para cada $U \in \mathfrak{C}$ se tiene que la flecha
$\tau_U : \mathcal{H}_X U \to \mathcal{F}U$ es un isomorfismo en **Set**.

■

Ejemplo 6.1.2.

Definimos el funtor $\mathcal{F} : \boldsymbol{Ring} \to \boldsymbol{Set}$ *de la siguiente manera:*

En objetos*: Para cada* $A \in \boldsymbol{Ring}$ *definimos* $\mathcal{F}A := \{a^2 \mid a \in A\}$.

En flechas*: Para cada flecha* $f : A \to B$ *en* $\boldsymbol{Ring}$ *definimos la flecha*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{F}f : \mathcal{F}A & \longrightarrow & \mathcal{F}B \\ a^2 & \mapsto & f^2(a) \end{array}$$

en $\boldsymbol{Set}$.

Así definido $\mathcal{F}$ *es un funtor covariante.*

Afirmación*:* $\mathcal{F} : \boldsymbol{Ring} \to \boldsymbol{Set}$ *no es un funtor representable.*

En efecto:

Supongamos que el funtor covariante $\mathcal{F} : \boldsymbol{Ring} \to \boldsymbol{Set}$ *es representable entonces por el teorema anterior posee objeto universal, digamos* (R, r^2). *Tomemos en particular el anillo de polinomios* $\mathbb{Z}[X]$ *y el elemento* $X^2 \in \mathcal{F}\mathbb{Z}[X]$, *luego por ser* (R, r^2) *objeto universal de* $\mathcal{F}$ *existe una única flecha* $f : R \to \mathbb{Z}[X]$ *en* $\boldsymbol{Ring}$ *tal que* $\mathcal{F}f(r^2) = X^2$ *y esta última igualdad es equivalente a decir que* $f^2(r) = X^2$. *Definimos la flecha* $g : \mathbb{Z}[X] \to \mathbb{Z}[X]$ *en* $\boldsymbol{Ring}$ *tal que* $g(X) = -X$ *y consideremos la composición* $g \circ f : R \to \mathbb{Z}[X]$ *la cual cumple que* $\mathcal{F}(g \circ f)(r^2) = X^2$ *pues* $\mathcal{F}(g \circ f)(r^2) = (\mathcal{F}g \circ \mathcal{F}f)(r^2) = \mathcal{F}g(\mathcal{F}f(r^2)) = \mathcal{F}(f^2(r)) = g^2(f(r)) = g(f^2(r)) = g(X^2) = g(X)g(X) = (-X)(-X) = X^2$ *entonces vemos que* f *y* $g \circ f$ *tienen las mismas condiciones pero como* f *es única entonces* $f = g \circ f$ *lo cual es una contradicción ya que* $f \neq g \circ f$. *En efecto: Dado que* $f^2(r) = X^2$ *sí y solo si* $f^2(r) - X^2 = 0$ *sí y solo si* $(f(r) - X)(f(r) + X) = 0$ *sí y solo si* $(f(r) - X) = 0$

o $(f(r) + X) = 0$ *y esto último se da porque* $\mathbb{Z}[X]$ *es un dominio de integridad, luego tenemos dos casos para* f. *Si* $f(r) = X$ *entonces* $(g \circ f)(r) = -X$ *y si* $f(r) = -X$ *entonces* $(g \circ f)(r) = X$, *luego tenemos que* $f \neq g \circ f$.

6.2 Una aplicación del lema de Yoneda al álgebra

El teorema de Cayley es nuestra siguiente aplicación y nos dice que:

Todo grupo es isomorfo a un subgrupo de algún grupo simétrico.

6.2.1 Grupos vistos como categorías

Sea $< G, \cdot >$ un grupo. Recordemos que el grupo G es visto como una categoría que denotaremos por C_G . Sabemos que la categoría C_G tiene un solo objeto que será denotado por " $*$ " y cuyas flechas son los elementos de G, la composición de flechas es la operación del grupo es decir si $a, b \in G$ tenemos que $(a : * \to *) \circ (b : * \to *) = b \circ a := b \cdot a : * \to *$

6.2.2 El funtor $\mathcal{H}^* : C_G \to$ Set

Definimos $\mathcal{H}^* : C_G \to$ **Set** de la siguiente manera:

En objetos : Para $* \in C_G$ tenemos que $\mathcal{H}^* * := Mor_{C_G}(*, *) = G$ es un objeto en **Set**.

En flechas : Para cada flecha $: * \to *$ en C_G tenemos que

$$
\begin{array}{rcl}
\mathcal{H}^*_a : \mathcal{H}^* * = Mor_{C_G}(*,*) & \longrightarrow & \mathcal{H}^* * = Mor_{C_G}(*,*) \\
b & \mapsto & \mathcal{H}^*_a(b) := a \circ b := a \cdot b
\end{array}
$$

es una flecha en **Set**.

Así definido $\mathcal{H}^*$ es un funtor covariante.

6.2.3 El funtor contravariante $\mathcal{H} : C_G \to [C_G, \mathbf{Set}]_{cov}$

Definimos $\mathcal{H} : C_G \to [C_G, \mathbf{Set}]$ de la siguiente manera:

En objetos: Para $* \in C_G$ tenemos que $\mathcal{H}^* : C_G \to \mathbf{Set} \in [C_G, \mathbf{Set}]_{cov}$.

En flechas: Para cada flecha $a : * \to *$ en C_G tenemos que

$\mathcal{H}_a : \mathcal{H}^* \to \mathcal{H}^*$ es una flecha en $[C_G, \mathbf{Set}]$ tal que para $* \in C_G$
tenemos que

$$
\begin{array}{rcl}
(\mathcal{H}_a)_* : \mathcal{H}^* * & \longrightarrow & \mathcal{H}^* * \\
b & \mapsto & a \cdot b
\end{array}
$$

Así definido $\mathcal{H}$ es un funtor contravariante.

Por el lema de Yoneda existe una aplicación biyectiva T definida de la siguiente manera:

$$
\begin{array}{rcl}
T : \mathcal{H}^* * & \longrightarrow & Mor_{[\mathfrak{C}, \mathbf{Set}]}(\mathcal{H}^*, \mathcal{H}^*) \\
a & \longmapsto & T(a) := \tau^a
\end{array}
$$

tal que para cada $* \in C_G$ se tiene que

$$
\begin{array}{rcl}
\tau^a_* : \mathcal{H}^* * & \longrightarrow & \mathcal{H}^* * \\
b & \longmapsto & \tau^a_*(b) := a \cdot b
\end{array}
$$

6.2.4 Rumbo al teorema de Cayley

Para cada $g \in G$ definimos

$$
\begin{array}{rcl}
\psi_g : G & \longrightarrow & G \\
b & \longmapsto & \psi_g(b) := g \cdot b
\end{array}
$$

Afirmación 1 : $Mor_{[C_G,\mathbf{Set}]_{cov}}(\mathcal{H}^*,\mathcal{H}^*) = \{\psi_g \mid g \in G\}$.
En efecto:

Es fácil ver que ψ_g es una transformación natural que va de $\mathcal{H}^*$ a $\mathcal{H}^*$ pues

$\mathcal{H}^* * = G$ y ya que $\psi_g(b) = g{\cdot}b$. Esto quiere decir que tenemos lo siguiente:

$Mor_{([C_G,\mathbf{Set}]_{cov})_{rep}}(\mathcal{H}^*,\mathcal{H}^*) \supseteq \{\psi_g \mid g \in G\}$.

El otro contenido se da usando el lema de Yoneda.

Afirmación 2:

$Mor_{([C_G,\mathbf{Set}]_{cov})_{rep}}(\mathcal{H}^*,\mathcal{H}^*)$ es un subgrupo del del grupo simétrico

$\{\Upsilon : G \to G \mid \Upsilon \text{ biyección}\}$.

En efecto:

Esto se da porque $Mor_{([C_G,\mathbf{Set}]_{cov})_{rep}}(\mathcal{H}^*,\mathcal{H}^*) = \{\psi_g \mid g \in G\}$.

Afirmación 3: La aplicación

$$\begin{array}{rcl} \Psi : Mor_{C_G}(*,*) = G & \longrightarrow & Mor_{([C_G,\mathbf{Set}]_{cov})_{rep}}(\mathcal{H}^**,\mathcal{H}^**) \\ a : * \to * & \mapsto & \Psi(a) = \Psi_a := \mathcal{H}^** \to \mathcal{H}^** \end{array}$$

con $\Psi_a(b) = a \circ b := a \cdot b$ es un isomorfismo de grupos.

En efecto:

Por el lema de Yoneda Ψ es biyectiva y es claro que también es

homorfismo de grupos.

6.2.5 La demostración del teorema de Cayley

Tomemos el grupo $< G, \cdot >$ considerado como una categoría.

Por la afirmación 3 tenemos que Ψ es un isomorfismo luego

$G \cong Mor_{([C_G, \mathbf{Set}]_{cov})_{rep}}(\mathcal{H}^**, \mathcal{H}^**)$ donde $Mor_{([C_G, \mathbf{Set}]_{cov})_{rep}}(\mathcal{H}^**, \mathcal{H}^**)$

es un subgrupo de del grupo simétrico $\{\Upsilon : G \to G \mid \Upsilon \ \text{ biyección}\}$.

6.3 Una aplicación del Lema de Yoneda a la geometría algebraica

6.3.1 La topología de Zariski

Definición 6.3.1. *Sea A un anillo conmutativo con identidad.*

Al conjunto de los ideales primos de A lo denotaremos por

$Spec(A) = \{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p}$ es un ideal primo de $A\}$ y lo llamaremos el ***espectro*** *del anillo A.*

Definición 6.3.2. *Para cada ideal $I \subseteq A$ definimos el conjunto*

$V(I) = \{\mathfrak{p} \in Spec(A) \mid I \subseteq \mathfrak{p}\}$.

Proposición 6.3.3. *Se cumple lo siguiente:*

1. *Si $I \subseteq J$ son ideales de A entonces $V(J) \subseteq V(I)$.*

2. *Sea $\{I_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una familia no vacía de ideales de A. Entonces*

   $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} V(I_\lambda) = V(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda) = V(\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda)$.

3. *$V(IJ) = V(I) \cup V(J) = V(I \cap J)$ con I, J ideales de A.*

4. *$V(A) = \emptyset$ y $V(\emptyset) = Spec(A)$*

Demostración:

Ver [10] página 70.

■

Teorema 6.3.4. *$(Spec(A), \mathcal{Z})$ es un espacio topológico donde el conjunto $\mathcal{Z} := \{V(I) \mid I$ es un ideal de $A\}$ es la familia de subconjuntos cerrados de $Spec(A)$. $\mathcal{Z}$ es llamada la* ***topología de Zariski****.*

Demostración:

Se sigue de la proposición anterior.

■

Observaciones 6.3.5.

1. *Consideremos el conjunto $V(S)$ donde S es cualquier subconjunto de un anillo A entonces sabemos que $< S >$ es un ideal de A, luego es fácil ver que $V(S) = V(< S >)$.*

2. *Los conjuntos abiertos de $Spec(A)$ serán denotados por*

   $D(I) = Spec(A) - V(I)$, para cada ideal I de A. Se cumple que

   $\beta = \{D(\{a\}) \mid a \in A\}$ es una base de la topología de Zariski $\mathcal{Z}$.

6.3.2 Prehaces

Definición 6.3.6. *Sea X un espacio topológico.*

Un ***prehaz de conjuntos*** *sobre X es un funtor contravariante $\mathcal{F} : \boldsymbol{Top}(X) \to \boldsymbol{Set}$. En otras palabras tenemos lo siguiente:*

1. *Para cada $U \in \boldsymbol{Top}(X)$ se tiene que $\mathcal{F}(U) \in \boldsymbol{Set}$.*

2. *Para cada flecha $i : U \hookrightarrow V$ en $\boldsymbol{Top}(X)$ tenemos que $\mathcal{F}i : \mathcal{F}V \to \mathcal{F}U$ es una flecha en **Set** que la denotaremos por $\mathcal{F}_{VU}$ y cumple lo siguiente:*

   a) $\mathcal{F}_{UU} = 1_{\mathcal{F}U}$, para cada $U \in \boldsymbol{Top}(X)$.

   b) Para cualesquiera $U, V, W \in \boldsymbol{Top}(X)$ con $U \subseteq V \subseteq W$ se tiene que $\mathcal{F}_{WU} = \mathcal{F}_{VU} \circ \mathcal{F}_{WV}$.

Observaciones 6.3.7.

1. *Los elementos de $\mathcal{F}(U)$ son llamados **secciones** o secciones locales de $\mathcal{F}$ sobre U.*

2. *Los elementos de $\mathcal{F}(X)$ son llamados **secciones globales**.*

3. *Si todos los $\mathcal{F}(U)$ son grupos, anillos, módulos, álgebras y los $\mathcal{F}_{UV}$ son homomorfismos con estas estructuras, entonces $\mathcal{F}$ será llamado de prehaz de grupos, anillos, módulos y álgebras respectivamente.*

4. *Llamaremos a $\mathcal{F}_{UV}$ la **restricción** de U a V y mayormente escribiremos $s|_V$ en lugar de $\mathcal{F}_{UV}(s)$ cuando $s \in \mathcal{F}(U)$.*

Ejemplos 6.3.8.

1. *Dado $G \in \boldsymbol{Ab}$ fijo. Definimos $\mathcal{F} : \boldsymbol{Top}(X) \to \boldsymbol{Ab}$ de la siguiente manera:*

   ***En objetos**: Para cada $U \in \boldsymbol{Top}(X)$ tenemos que $\mathcal{F}(U) := G$*

   ***En flechas**: Para cada flecha $f : U \hookrightarrow V$ en $\boldsymbol{Top}(X)$ tenemos que $\mathcal{F}_{VU} := 1_G$.*

Así definido $\mathcal{F}$ es un prehaz llamado el ***prehaz constante*** *determinado por G.*

Cuando $G = \{0\}$, decimos que $\mathcal{F}$ es el ***prehaz cero****.*

2. *Dado $\mathcal{F} : \boldsymbol{Top}(X) \to \boldsymbol{Ab}$ prehaz y $U \in \boldsymbol{Top}(X)$ fijo.*

   Definimos $\mathcal{F}|_U : \boldsymbol{Top}(X) \to \boldsymbol{Ab}$ de la siguiente manera:

   En objetos*: Para cada $V \in \boldsymbol{Top}(X)$ donde $V \subseteq U$ tenemos que $\mathcal{F}|_U(V) := \mathcal{F}(V) \in \boldsymbol{Ab}$.*

   En flechas*: Para cada flecha $i : V \hookrightarrow W$ en $\boldsymbol{Top}(X)$ con $V \subseteq W \subseteq U$ tenemos que $(\mathcal{F}|_U)_{WV} := \mathcal{F}_{WV}$.*

   Así definido $\mathcal{F}$ es un prehaz llamado el ***prehaz restricción*** *de $\mathcal{F}$ a U.*

Definición 6.3.9. *Sean $\mathcal{F}, \mathcal{G} : \boldsymbol{Top}(X) \to \boldsymbol{Set}$ dos prehaces.*

Un ***morfismo*** *de prehaces entre $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ es una transformación natural $\tau : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$.*

Definición 6.3.10. *Un morfismo de prehaces entre $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ es un* ***isomorfismo*** *de prehaces si $\tau : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ es un isomorfismo natural.*

6.3.3 El tallo de un prehaz

Sea $\mathcal{F} : \mathbf{Top}(X) \to \mathbf{Ab}$ prehaz y $p \in X$. En el siguiente conjunto $A_p = \{(U, s) \mid U \in \mathcal{V}_p, s \in \mathcal{F}(U)\}$, donde $\mathcal{V}_p$ es el conjunto de las vecindades abiertas de p, definimos una relacion $\sim$ como sigue:

$(U, s) \sim (V, t)$ sí y solo si existe $W \in \mathcal{V}_p$ con $W \subseteq U \cap V$ tal que $s|_W = t|_W$.

Es fácil ver que $\sim$ es una relación de equivalencia en A_p . Escribiremos $\mathcal{F}_p$ para denotar denotar al conjunto cociente $\frac{A_p}{\sim}$. La clase de equivalencia de $(U, s) \in A_p$ será denotada por $< U, s >$.

Teorema 6.3.11. *$(\mathcal{F}_p, +)$ es un grupo abeliano con la operación*

$< U, s > + < V, t > = < U \cap V, s|_{U \cap V} + t|_{U \cap V} >$.

Demostración:

El elemento neutro es $< X, 0 >$, donde 0 denota el elemento neutro del grupo $\mathcal{F}(X)$ y $< U, -s >$ es el opuesto de cualquier elemento $< U, s >$.

■

Definición 6.3.12. *EL grupo $\mathcal{F}_p$ es llamado el **tallo** de $\mathcal{F}$ en p.*

*Los elementos del grupo $\mathcal{F}_p$ son llamados **gérmenes** de $\mathcal{F}$ en p.*

6.3.4 Haces

Definición 6.3.13. *Un prehaz $\mathcal{F} : \boldsymbol{Top}(X) \to \boldsymbol{Ab}$ es llamado **haz** si para cada subconjunto abierto $U \subseteq X$ y cada cubrimiento abierto de U digamos $U = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$, se cumplen las siguientes condiciones:*

i. Si $s_1, s_2 \in \mathcal{F}(U)$ son tales que $s_1|_{U_i} = s_2|_{U_i}$ para todo $i \in \Lambda$ entonces $s_1 = s_2$.

ii. Si para cada $i \in \Lambda$ tenemos que $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ tal que $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$ para cada $i, j \in \Lambda$ entonces existe $s \in \mathcal{F}(U)$ tal que $s|_{U_i} = s_i$ para cada $i \in \Lambda$.

Observaciones 6.3.14.

1. *El elemento de la condición ii es único.*

2. *El elemento $\mathcal{F}(\emptyset)$ es el grupo trivial cero por las condiciones i y ii.*

Ejemplos 6.3.15.

1. *El prehaz constante definido anteriormente es un haz.*

2. *El prehaz restricción de $\mathcal{F}$ a U donde $\mathcal{F} : \boldsymbol{Top}(X) \to \boldsymbol{Ab}$ un prehaz y $U \subseteq X$ subconjunto abierto de X es un haz.*

3. *Sea $p \in X$. Definimos $\mathcal{F} : \boldsymbol{Top}(X) \to \boldsymbol{Ab}$ de la siguiente manera:*

$$\mathcal{F}(U) = \begin{cases} G & si \quad p \in U \\ \\ 0 & si \quad p \notin U \end{cases}$$

   Así definido $\mathcal{F} : \boldsymbol{Top}(X) \to \boldsymbol{Ab}$ es un haz llamado el haz ***sky-craper****.*

4. *Consideremos $\mathbb{C}$ con la topología usual. Definimos el prehaz de las* ***funciones acotadas*** *$\mathcal{F} : \boldsymbol{Top}(X) \to \boldsymbol{Ab}$ de la siguiente manera:*

   $\mathcal{F}(U) = \{f : U \to \mathbb{C} \mid f \ \ acotada\}$

   Este prehaz no es un haz.

5. *Sea $f : X \to Y$ continua y $\mathcal{F} : \boldsymbol{Top}(X) \to \boldsymbol{Ab}$ un haz.*

   Definimos el haz $f_*\mathcal{F} : \boldsymbol{Top}(Y) \to \boldsymbol{Ab}$ por $f_*\mathcal{F}(U) := \mathcal{F}(f^{-1}(U))$ para cada subconjunto abierto U de Y.

   Este haz es llamado el haz ***imagen directa****.*

Definición 6.3.16. *Sean* $\mathcal{F}, \mathcal{G} : \boldsymbol{Top}(X) \to \boldsymbol{Set}$ *dos haces.*

Un ***morfismo*** *de haces entre* $\mathcal{F}$ *y* $\mathcal{G}$ *es una transformación natural* $\tau : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$.

Definición 6.3.17. *Un morfismo de haces entre* $\mathcal{F}$ *y* $\mathcal{G}$ *es un* ***isomorfismo*** *de haces si* $\tau : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ *es un isomorfismo natural.*

6.3.5 Esquemas

Definición 6.3.18. *Un* ***espacio anillado*** *es un par* $(X, \mathcal{O}_X)$ *donde* X *es un espacio topológico y* $\mathcal{O}_X$ *es un haz de anillos conmutativos sobre* X *al que llamaremos de* ***haz estructural****.*

Definición 6.3.19. *Sean* $(X, \mathcal{O}_X)$ *y* $(Y, \mathcal{O}_Y)$ *espacios anillados.*

Un ***morfismo de espacios anillados*** *de* $(X, \mathcal{O}_X)$ *a* $(Y, \mathcal{O}_Y)$ *es un par* $(f, f^{\#}) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ *donde* $f : X \to Y$ *es aplicación continua y* $f^{\#} : \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ *es un morfismo de haces sobre* Y.

Definición 6.3.20. *Un espacio anillado* $(X, \mathcal{O}_X)$ *es un* ***espacio localmente anillado*** *si el tallo* $\mathcal{O}_{X,p}$ *es un anillo local para todo* $p \in X$.

Ejemplo 6.3.21.

$(Spec(A), \mathcal{O}_{Spec(A)})$ *es un espacio localmente anillado donde A es un anillo conmutativo con identidad. Ver* [10] *página 73.*

Definición 6.3.22. *Dados* $(X, \mathcal{O}_X)$ *y* $(Y, \mathcal{O}_Y)$ *espacios localmente anillados.*

Un ***morfismo de espacios localmente anillados*** *de* $(X, \mathcal{O}_X)$ *a* $(Y, \mathcal{O}_Y)$ *es un morfismo de espacios anillados* $(f, f^{\#}) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ *tal que para cada punto* $p \in X$, *la aplicación* $f_p^{\#} : \mathcal{O}_{Y,f(p)} \to \mathcal{O}_{X,p}$ *es un* *homomorfismo local. Para más detalles de como se consigue ese homomorfismo local ver* [10] *página* 72.

Observaciones 6.3.23.

1. *Vamos a definir una nueva categoría, llamada la categoría de* ***espacios anillados*** *denotada por* ***Ea*** *donde los objetos son los espacios anillados y las flechas son los morfismos de espacios anillados. La composición es definida de la siguiente manera:*

   Dadas $(f, f^{\#}) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ *y* $(g, g^{\#}) : (Y, \mathcal{O}_Y) \to (Z, \mathcal{O}_Z)$ *dos flechas en la categoría de espacios anillados. La composición de* $(f, f^{\#}) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ *y* $(g, g^{\#}) : (Y, \mathcal{O}_Y) \to (Z, \mathcal{O}_Z)$ *es* $(h, h^{\#}) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Z, \mathcal{O}_Z)$ *donde* $h = g \circ f$ *y* $h^{\#} = (g_* f^{\#}) \circ g^{\#}$.

   La flecha identidad $(f, f^{\#}) : (X, \mathcal{O}_X) \to (X, \mathcal{O}_X)$ *cumple que* $f = id_X$ *y* $f^{\#} = id_{\mathcal{O}_X}$.

2. *De forma similar podemos obtener la* ***categoría de espacios localmente anillados*** *denotada por* ***Ela*** *donde los objetos son espacios localmente anillados y las flechas son morfismos de espacios localmente anillados.*

   Es fácil demostrar que la categoría de espacios localmente anillados es una subcategoría de la categoría de espacios anillados.

Definición 6.3.24. *Sean* $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y) \in$ ***Ea****.*

Una flecha $(f, f^{\#}) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ *en* ***Ea*** *es un* ***isomorfismo*** *si existe la flecha* $(g, g^{\#}) : (Y, \mathcal{O}_Y) \to (X, \mathcal{O}_X)$ *en* ***Ea*** *tal que* $(f, f^{\#}) \circ (g, g^{\#}) = (id_Y, id_{\mathcal{O}_Y})$ *y* $(g, g^{\#}) \circ (f, f^{\#}) = (id_X, id_{\mathcal{O}_X})$.

Definición 6.3.25. *Sean* $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y) \in$ ***Ela****.*

Una flecha $(f, f^{\#}) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ *en* ***Ela*** *es un* ***isomorfismo*** *si existe la flecha* $(g, g^{\#}) : (Y, \mathcal{O}_Y) \to (X, \mathcal{O}_X)$ *en* ***Ela*** *tal que* $(f, f^{\#}) \circ (g, g^{\#}) = (id_Y, id_{\mathcal{O}_Y})$ *y* $(g, g^{\#}) \circ (f, f^{\#}) = (id_X, id_{\mathcal{O}_X})$*.*

Proposición 6.3.26. *Sean* $(X, \mathcal{O}_X)$ *y* $(Y, \mathcal{O}_Y)$ *espacios anillados.*

Un morfismo de espacios anillados $(f, f^{\#}) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ *es un isomorfismo sí y solo si* $f : X \to Y$ *es un homeomorfismo y* $f^{\#} : \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ *es un isomorfismo de haces.*

Definición 6.3.27. *Un espacio localmente anillado* $(X, \mathcal{O}_X)$ *es un* ***esquema afín*** *si* $(X, \mathcal{O}_X) \cong (Spec(A), \mathcal{O}_{Spec(A)})$ *para algún anillo* A*.*

Definición 6.3.28. *Un espacio localmente anillado* $(X, \mathcal{O}_X)$ *es un* ***esquema*** *si existe un cubrimiento abierto* $\{U_i\}_{i \in \wedge}$ *de* X *tal que* $(U_i, \mathcal{O}_X|_{U_i})$ *es un esquema afín para todo* $i \in \wedge$*.*

Los esquemas $(X, \mathcal{O}_X)$ *serán denotados por* X *para no sobrecargar notación.*

Observaciones 6.3.29.

1. *Vamos a definir una nueva categoría, llamada la categoría de* ***esquemas afines*** *denotada por* $\mathfrak{Eaf}$ *donde los objetos son los esquemas afines y las flechas son los morfismos de espacios localmente anillados. La composición es definida de la siguiente manera:*

   Dadas $(f, f^{\#}) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ *y* $(g, g^{\#}) : (Y, \mathcal{O}_Y) \to (Z, \mathcal{O}_Z)$ *dos flechas en la categoría de esquemas afines. La composición de*

$(f, f^{\#}) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ *y* $(g, g^{\#}) : (Y, \mathcal{O}_Y) \to (Z, \mathcal{O}_Z)$ *es*

$(h, h^{\#}) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Z, \mathcal{O}_Z)$ *donde* $h = g \circ f$ *y* $h^{\#} = (g_* f^{\#}) \circ g^{\#}$.

La flecha identidad $(f, f^{\#}) : (X, \mathcal{O}_X) \to (X, \mathcal{O}_X)$ *cumple que*

$f = id_X$ *y* $f^{\#} = id_{\mathcal{O}_X}$.

2. *De forma similar podemos obtener la* ***categoría de esquemas*** *denotada por* $\mathfrak{Esq}$ *donde los objetos son los esquemas y las flechas son los morfismos de espacios localmente anillados.*

Teorema 6.3.30. *Las categorías* ***CRing*** *y* $\mathfrak{Eaf}$ *son equivalentes.*

Demostración:

Definimos $\mathcal{F}$: ***CRing*** $\to \mathfrak{Eaf}$ *de la siguiente manera:*

En objetos: *Para cada* $R \in$ ***CRing*** *se tiene* $(Spec(R), \mathcal{O}_{Spec(R)})) \in \mathfrak{Eaf}$.

En flechas: *Para cada flecha* $f : A \to B$ *en* ***CRing*** *tenemos que la flecha* $(Spec(B), \mathcal{O}_{Spec(B)}) \to (Spec(A), \mathcal{O}_{Spec(A)})$ *está en* $\mathfrak{Eaf}$.

Así definido $\mathcal{F}$: ***CRing*** $\to \mathfrak{Eaf}$ *es un funtor contravariante plenamente fiel y denso, por lo tanto tenemos que* ***CRing*** *y* $\mathfrak{Eaf}$ *son equivalentes.*

Este último teorema quiere decir que un esquema afín $(Spec(B), \mathcal{O}_{Spec(B)})$ *es lo mismo que un anillo conmutativo* B *y una flecha* $(Spec(B), \mathcal{O}_{Spec(B)}) \to (Spec(A), \mathcal{O}_{Spec(A)})$ *en* $\mathfrak{Eaf}$ *es lo mismo que una flecha* $A \to B$ *en* ***CRing***.

■

6.3.6 El funtor de puntos

Definición 6.3.31. *Sea X un esquema.*

*El **funtor de puntos del esquema** X es el funtor*

$\mathcal{H}_X : \mathfrak{Esq} \to \boldsymbol{Set}$ *definido como siempre.*

Definición 6.3.32. *Sea X un esquema.*

*A los elementos $\mathcal{H}_X Y$ se les denomina los **Y- puntos de X**.*

Ejemplos 6.3.33.

1. *Sea $R = \mathbb{Z}[x_1, x_2, ..., x_n]/\langle f_1, f_2, ..., f_m\rangle$ y consideremos los esquemas afines X y Y tales que $X = Spec(R)$, $Y = Spec(S)$ donde S es un anillo.*

   Tenemos que $\mathcal{H}_X Y := Mor_{\mathfrak{Esq}}(Y, X)$ y cada elemento de este último conjunto es lo mismo que un homomorfismo de anillos en dirección opuesta,esto quiere decir que cada flecha $Y \to X \in Mor_{\mathfrak{Esq}}(Y, X)$ es un homomorfismo de anillos $R \to S$ y esto último es equivalente a especificar imágenes $x_i \to a_i$ para $i = 1, 2, ..., n$ sujeto a la condición de que $f_j(a_1, ..., a_n) = 0$ para $j = 1, ..., m$. En otras palabras

   $\mathcal{H}_X Y$ se identifica con $\{(a_1, a_2, a_3, ..., a_n) \in S^n \mid f_j(a_1, ..., a_n) = 0, \forall j\}$.

2. *Sea $R = \mathbb{Z}[x, y]/\langle y - x^2\rangle$ y consideremos los esquemas afines X y Y donde $X = Spec(R)$, $Y = Spec(\mathbb{Q})$ donde $\mathbb{Q}$ es el anillo de los números racionales.*

   Tenemos que $\mathcal{H}_X Y := Mor_{\mathfrak{Esq}}(Y, X)$ y cada elemento de este último conjunto es lo mismo que un homomorfismo de anillos en dirección *opuesta o sea cada flecha* $Y \to X \in Mor_{\mathfrak{Esq}}(Y,(X,Y)$ *es lo mismo que un homomorfismo de anillos* $R \to \mathbb{Q}$ *y esto último es equivalente a especificar imágenes* $x \to a$, $y \to b$ *sujeto a la condición de que* $b = a^2$. *En otras palabras* $\mathcal{H}_X Y$ *se identifica con* $\{(a,b) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \mid b = a^2\}$.

Definición 6.3.34. *Consideremos la categoría de Yoneda* $[\mathfrak{Esq}, \boldsymbol{Set}]$.

El ***funtor de puntos*** *es definido como el funtor de Yoneda* $\mathcal{H} : \mathfrak{Esq} \to [\mathfrak{Esq}, \boldsymbol{Set}]$, *luego tenemos que* $\mathcal{H}$ *es la inmersión de Yoneda esto quiere decir que* $\mathcal{H}$ *es plenamente fiel e inyectivo en objetos. Entonces podemos identificar un esquema* X *con su imagen por la inmersión* $\mathcal{H} : \mathfrak{Esq} \to [\mathfrak{Esq}, \boldsymbol{Set}]$, *es decir, con el funtor* $\mathcal{H}_X : \mathfrak{Esq} \to \boldsymbol{Set}$ *dado por* $\mathcal{H}_X Y := Mor_{\mathfrak{Esq}}(Y,X)$.

Ejemplos 6.3.35.

1. *El esquema afín* $X = Spec(R)$ *donde* $R = \mathbb{Z}[x,y]/\langle y - x^2 \rangle$ *se identifica con* $\{(a,b) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \mid b = a^2\}$ *cuando* $Y = Spec(\mathbb{Q})$ *pues* $X = Spec(R)$ *se identifica vía la inmersión de Yoneda con el funtor* $\mathcal{H}_X : \mathfrak{Esq} \to \boldsymbol{Set}$ *dado por* $\mathcal{H}_X Y := Mor_{\mathfrak{Esq}}(Y,X)$.

2. *El esquema afín* $X = Spec(R)$ *donde* $R = \mathbb{Z}[x,y]/\langle 1 + x^2 \rangle$ *se identifica con* $\{(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 1 + a^2 = 0\} = \emptyset$ *cuando* $Y = Spec(\mathbb{R})$ *pues* $X = Spec(R)$ *se identifica vía la inmersión de Yoneda con el funtor* $\mathcal{H}_X : \mathfrak{Esq} \to \boldsymbol{Set}$ *dado por* $\mathcal{H}_X Y := Mor_{\mathfrak{Esq}}(Y,X)$.

   Pero si $Y = Spec(\mathbb{C})$, *el esquema afín* $X = Spec(R)$ *se identifica con* $\{(a,b) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \mid 1 + a^2 = 0\}$.

Bibliografía

[1] Barry Mitchell, Theory of categories. Academic Press, 1965.

[2] Bodo Pareigis, Categories and functors. Academic Press, 1970.

[3] D. Eisenbud and J. Harris, The Geometry of Schemes. Springer, 2001.

[4] David Mumford, The Red Book of Varieties and Schemes. Springer Berlin Heidelberg 1988 .

[5] Emily Riehl, Category Theory in Context. Series: Aurora: Modern Math Originals Publisher: Dover, Year: 2016.

[6] Francis Borceux, Handbook of categorical algebra [Volume 1]. Cambridge University Press 1994.

[7] Peter Freyd, Abelian categories. Introduction to theory of functors. Harper and Row, 1964.

[8] Philippe Tondeur, Categorías y funtores. Disponible en http://cms.dm.uba.ar/depto/public/A/serieA21.pdf.

[9] Qing Liu, Algebraic Geometry and Arithmetic Curves. Oxford, 2002.

[10] R. Hartshorne, Algebraic Geometry. Springer Verlag, 1977.

[11] Saunders Mac Lane, Categories for the working mathematician. Springer-Verlag 1971.

[12] Tom Leinster, Basic category theory. Cambridge University Press 2014.